

Risikotheorie 1

SS 1999

Prof. Dr. Christian Hipp

Lehrstuhl für Versicherungswissenschaft
an der TH Karlsruhe
Kronenstr. 34
76133 Karlsruhe

5. Juli 1999

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Überblick über die Versicherungswirtschaft	1
1.1.1	Versicherung in Deutschland	1
1.1.2	Internationalisierung des Marktes	1
1.2	Funktionsweise von Versicherung	2
1.3	Relevante Größen und Faktoren	3
1.4	Lernziele	4
1.5	Der Risikobegriff	5
2	Grundbegriffe der Statistik	9
2.1	Zufallsvariablen, Dichten, Zähldichten und Verteilungsfunktionen	10
2.2	Momente und Erwartungswerte	12
2.3	Stochastische Unabhängigkeit und Faltungen	15
2.3.1	Stochastische Unabhängigkeit	15
2.3.2	Satz von Fubini	16
2.3.3	Korrelation	17
2.3.4	Faltung	18
2.4	Beispiele für Verteilungen	20
2.4.1	Gleichverteilung	21
2.4.2	Pareto-Verteilung	21

2.4.3	Gamma-Verteilung	22
2.4.4	Weibull-Verteilung	22
2.4.5	Logarithmische Verteilung	22
2.4.6	Negative Binomial-Verteilung	23
2.5	Quantiltransformation und Transformation von Verteilungen	23
2.5.1	Haftungsobergrenze (Erstrisikoversicherung)	25
2.5.2	Selbstbeteiligung (Zweitrisikoversicherung)	25
2.6	Charakteristische, momenterzeugende und erzeugende Funktionen	26
2.7	nochmals Faltungen	27
2.8	Tschebyscheff'sche Ungleichung	29
2.9	Die Gesetze der großen Zahlen	30
2.10	Grenzwertsätze	32
3	Risikothoretische Modelle	35
3.1	Individuelles Modell	35
3.2	Kollektives Modell	37
3.2.1	Summenverteilungen	39
3.2.1.1	Faltungseigenschaften von Summenverteilungen	40
3.2.1.2	Naive Berechnung von Summenverteilungen	41
3.2.1.3	Rekursive Berechnung von Summenverteilungen	42
3.3	PSV-Approximation	44
3.3.1	Beweis des Satzes über die PSV-Approximation	46
3.4	Normalapproximation für Poisson-sche Summenverteilungen	48
3.5	Summenverteilungen mit Großschäden	48
3.6	Approximationen von Tailwahrscheinlichkeiten	55
4	Ruintheorie	57
4.1	Diskrete Ruinwahrscheinlichkeit	57

4.2	Anpassungskoeffizient und Cramer-Lundberg-Ungleichung	59
4.3	Faltungsformel für die Ruinwahrscheinlichkeit	63
4.4	Klassischer Risikoreserveprozeß	64
4.5	Großschadenproblematik	67
5	Prämienprinzipien	69
5.1	Übersicht	69
5.2	Ökonomische und mathematische Eigenschaften	69
5.2.1	Eigenschaften von Prämienprinzipien	71
5.2.2	Exponentialprinzip — Anpassungskoeffizient	72
5.2.3	Exponentialprinzip — Varianzprinzip	72
6	Statistische Verfahren	73
6.1	nichtparametrische Verfahren	73
6.2	Parametrische Verfahren	75
6.2.1	Maximum-Likelihood-Methode	75
6.2.1.1	ML-Methode bei transformierten Beobachtungen	78
6.2.2	Momentenschätzer	79
6.2.3	Modelle für inhomogene Bestände: lineare Modelle und Alternativen	81
6.2.3.1	Kovariate Veränderliche	81
6.2.4	Bayes'sches Verfahren	82
6.3	Credibility-Theorie und Erfahrungstarifizierung	84
6.3.1	Credibility-Schätzer	86
A	Übungsaufgaben und Lösungen	89
A.1	Aufgaben	89
A.2	Lösungen	100
B	Steckbriefe von Verteilungen	129

B.1	diskrete Verteilungen (SZV)	129
B.1.1	Gemischte Poisson-Verteilung	130
B.1.2	Poisson-Verteilung	131
B.1.3	Binomial-Verteilung	132
B.1.4	Negativ-Binomial-Verteilung	133
B.1.5	Logarithmische Verteilung	134
B.1.6	Verallgemeinerte Poisson-Verteilung	135
B.2	stetige Verteilungen (SHV)	136
B.2.1	Gleich-Verteilung	136
B.2.2	Exponential-Verteilung	137
B.2.3	Gamma-Verteilung	138
B.2.4	Normal-Verteilung	139
B.2.5	Weibull-Verteilung	140
B.2.6	Log-Normal-Verteilung	141
B.2.7	Log-Gamma-Verteilung	142
B.2.8	Beta-Verteilung	143
B.2.9	Invers-Gaußsche-Verteilung	145
B.2.10	Pareto-Verteilung	146
B.2.11	Verschobene Pareto-Verteilung	147

Kapitel 1

Einführung

1.1 Überblick über die Versicherungswirtschaft

1.1.1 Versicherung in Deutschland

Einige wenige Zahlen mögen die Bedeutung der Versicherungswirtschaft in Deutschland verdeutlichen (siehe auch Tabelle 1.1). So betragen die gezahlten Versicherungsprämien etwa 9% des Bruttosozialproduktes. Die Versicherungsunternehmen beschäftigen über 300000 Inendienstmitarbeiter. Im haupt- und nebenberuflichen Versicherungsaußendienst sind weitere 359000 Personen beschäftigt. Das weltweite Prämienvolumen beträgt 1355,7 Mrd. US-\$ (1992) beziehungsweise 1465,9 Mrd. US-\$ (1993) und 2146,0 Mrd. US-\$ (1994).

1.1.2 Internationalisierung des Marktes

Die Deregulierung im EU-Binnenmarkt (Stichtag 01.07.94) hat bereits und wird im Versicherungsbereich auch in Zukunft voraussichtlich für weitgehende Veränderungen sorgen:

- Viele neue Anbieter drängen auf den Markt, neue Produkte werden angeboten, die Margen werden geringer, der Wettbewerb nimmt zu.
- Der deutsche Versicherungsmarkt hat bedeutende Fusions- und Übernahmektionen er-

	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Prämieneinnahmen	168,9	184,0	196,9	214,7	218,8	225,6	231,6
Kapitalanlagen	778,5	840,0	921,5	990,0	1116,6	1221,1	k.A.
Versicherungsleistungen	139,3	156,8	194,9	209,0	227,2	241,3	256,7

Tabelle 1.1: Umfang des Versicherungsgeschäftes in Deutschland, in Mrd. DM

lebt, so z.B. die Gründung der ERGO-Gruppe im Münchener Rückversicherungsbesitz, mit den Mitgliedern Hamburg-Mannheimer, DKV Deutsche Krankenversicherung, Victoria Holding und DAS Rechtsschutz, und die Gründung der PARION-Gruppe mit der Gothaer und der Berlin-Kölnischen. Die erste Gruppe hat in 1997 ein Prämienaufkommen von 21,3 Mrd. DM.

- Die größere Vertragsfreiheit ist speziell für den deutschen Versicherungsmarkt eine Herausforderung, von der noch keiner weiß, ob er sie als Chance oder als Risiko ansehen soll.
- Die Kalkulation wird wichtiger, da das BAV nicht mehr durch seine Tarifierungsüberwachung dafür sorgt, daß die Kalkulation der Versicherer weitgehend vereinheitlicht ist.
- Die neuen Aufgaben erfordern qualifizierteres Personal. Dies ist einer der Gründe, weshalb in Deutschland ein Berufsbild entstand, das in anderen Ländern – speziell in Großbritannien – längst zum Alltag gehört: der Aktuar. Am 22.02.93 wurde die Deutsche Aktuarvereinigung (DAV) gegründet. Dabei handelt es sich um eine berufsständische Vereinigung, die Absolventen der Mathematik und auch Wirtschaftsingenieuren eine Ausbildung in Fortführung ihres Studiums bietet. Nach Bestehen der dazugehörigen Prüfung führen die Mitglieder der DAV den Titel „Aktuar (DAV)“. Typische Aufgaben des Aktuars liegen in den Bereichen Produktentwicklung, Sicherstellung der Finanzierbarkeit im Passivgeschäft und der Steuerung der Kapitalanlagen auf der Aktivseite. Der Aktuar stellt dem Versicherungsunternehmen in diesen Bereichen Testate aus. Für Wirtschaftsingenieure mit versicherungswissenschaftlichem Studienschwerpunkt wird der Zugang zur DAV dadurch erleichtert, daß Studienleistungen als Teilprüfungen anerkannt werden.
- Auch im Bereich der Rückversicherung gibt es neue Versicherungsformen. Versicherungsfutures sind nur ein Beispiel für die neuen Spielarten.
- Die Änderungen sind eine ideale Voraussetzung für den Nachwuchs. Denn auch für die „alten Hasen“ sind die Veränderungen Neuland.

1.2 Funktionsweise von Versicherung

Das Versicherungsgeschäft basiert auf dem Prinzip des *Ausgleich im Kollektiv*. Einzelne Versicherungsverträge werden in einem großen Portefeuille von Versicherungsverträgen zusammengefaßt und bilden so ein Kollektiv, eine Gruppe von (stochastisch unabhängigen) Risiken. Unter dem Ausgleich im Kollektiv ist die Kompensation der einzelnen Schadenunterschreitungen bzw. Schadenüberschreitungen in den einzelnen Verträgen in einem solchen Kollektiv zu verstehen. Schadenüberschreitungen sind hierbei Schäden über dem individuellen Erwartungswert, Schadenunterschreitungen entsprechend Schäden unter dem Erwartungswert. Dieser Ausgleich im Kollektiv ist gewährleistet, wenn das Kollektiv homogen ist und die

Risiken stochastisch unabhängig sind. Große Kollektive sind nie völlig homogen; dennoch ist auch dann ein Ausgleich im Kollektiv möglich.

Um den Ausgleich im Kollektiv sicherzustellen wird versucht, das übernommene Risiko zu kontrollieren. In diesem Zusammenhang sind die Versicherer beispielsweise bestrebt, Kumulrisiken durch Risikostreuung zu vermindern. Ein weiteres Mittel ist die Rückversicherungspolitik. Die Möglichkeit, das übernommene Risiko zu kontrollieren, ist Grundlage für jedes Versicherungsgeschäft.

1.3 Relevante Größen und Faktoren

Sicherheitszuschläge Grundlage der Prämienkalkulation ist zunächst das Äquivalenzprinzip.

Dies bedeutet die Gleichheit von erwarteten Schäden und (erwarteter) Prämienzahlung. Eine derart berechnete Prämie ist allerdings nicht ausreichend. So läßt sich beispielsweise zeigen, daß derart gebildete Nettorisikoprämien (NRP) mit Wahrscheinlichkeit 1 zum technischen Ruin führen. Und das sogar unabhängig davon, ob und wieviel Reservekapital bei Aufnahme des Versicherungsgeschäftes vorhanden ist. Dies wird in Kapitel 4 präzisiert.

Versicherungstechnische Rückstellungen Im Lebensversicherungsbereich dominieren hier die Deckungsrückstellung und die Rückstellung für Beitragsüberträge (RfB). Im Sachversicherungsbereich verdienen die Schwankungsrückstellung, die Spätschädenrückstellung, die Großrisikenrückstellung und die Drohverlustrückstellung Erwähnung. Die versicherungstechnischen Rückstellungen dienen dazu, unabhängig von Bilanzierungszeiträumen Geldmittel über längere Dauer anzusammeln, um entweder selten oder erst nach langer Zeit sich realisierende Schäden begleichen zu können.

Gewinnbeteiligung Da aus technischen Gründen Sicherheitszuschläge erhoben werden müssen (s.o.), entstehen in der Regel (nämlich bei Nichteintritt eines *worst case*) Gewinne. Aus marktpolitischen, gesetzlichen und vertraglichen Gründen werden in manchen Sparten Teile dieser Gewinne an die Versicherungsnehmer in Form von Gewinnbeteiligung zurückerstattet. Die bekanntesten Formen sind:

- Überschußbeteiligung in der Lebensversicherung
- Beitragsrückerstattung in der Kfz-Versicherung für (langjährig) unfallfreie Versicherte.
- Beitragsrückerstattung in der privaten Krankenversicherung bei Nichtinanspruchnahme von Leistungen über ein oder mehrere Jahre.

Prämienanpassung Die Versicherungswirtschaft kennt verschiedene Formen der Prämienanpassung:

- In den meisten Sachversicherungssparten ist eine Prämienanpassungsklausel vereinbart. Nach dieser darf der Versicherer die Prämie einseitig erhöhen¹, falls sich

¹bzw. er muß sie ggf. reduzieren

ein Schadenbedarfsindex erhöht. Dieser Index berücksichtigt nicht den einzelnen Vertrag, sondern ein Kollektiv von Verträgen (häufig über Unternehmensgrenzen hinweg durch Verbände gepflegt).

- Gemäß dem Schadenverlauf des einzelnen Vertrages kann ein Zu- oder Abschlag zur Prämie vereinbart sein. Das Bonus- / Malus-System in der Kraftfahrtversicherung ist hier sicher das bekannteste Beispiel.
- In Folge der Deregulierung werden neue Tarifierungskonzepte leichter durchsetzbar. Beispielsweise will man sich als Versicherer die Kenntnisse über den bisherigen Schadenverlauf zunutze machen. Das interessante an diesem Ansatz (der sogenannten *Erfahrungstarifizierung*) ist die Tatsache, daß hierbei unter Umständen auch der Schadenverlauf von anderen Verträgen desselben Kunden bei diesem Versicherer Berücksichtigung findet.

Franchisen Um moralisches Risiko eines Vertrages² zu senken und zur Befreiung des Versicherers von der Regulierungspflicht für Klein(st)schäden kennt man diverse Selbstbeteiligungen oder Franchisen:

- prozentuale Selbstbeteiligung: Der Versicherte trägt einen gewissen Prozentsatz jedes Schadens selbst. Häufig wird zusätzlich eine absolute Höchstgrenze für die Selbstbeteiligung vereinbart.
- Abzugsfranchise: Von jedem versicherten Schaden wird von der Entschädigungsleistung der vereinbarte Franchisebetrag abgezogen.
- Integralfranchise: Schäden, die einen vereinbarten Betrag oder Prozentsatz übersteigen, werden voll reguliert — andere gar nicht. Bei dieser Regelung überschreiten nahezu alle Schäden den vereinbarten Satz (moralisches Risiko). Daher hat die Integralfranchise nur noch geringe Bedeutung; sie kommt praktisch nur noch in der Transportversicherung vor.

Kombinationen dieser Alternativen sind möglich.

Produktentwicklung Produktgestaltung oder Produktdesign sind in Folge der Deregulierung künftig absatzpolitische Werkzeuge von größerer Bedeutung, da die Genehmigung von Tarifen vor ihrer Einführung durch eine Kontrolle danach ersetzt wurde. Die Versicherer sehen sich mit der Notwendigkeit konfrontiert, schnell und flexibel auf neue Kundenbedürfnisse durch neue oder modifizierte Tarife zu reagieren³.

1.4 Lernziele

Im Anschluß an diese Vorlesung sollten Sie

²Darunter versteht man den psychologisch erklärbaren und statistisch nachweisbaren Zusammenhang zwischen dem Grad des Versicherungsschutzes und der Schadeneintrittswahrscheinlichkeit .

³Speziell hier ist die Differenz zwischen Anspruch und Realität häufig noch zu groß.

- das Risiko als Zufallsvariable modellieren
- den Sicherheitszuschlag bei der Prämienkalkulation begründen
- verschiedene Schäden durch geeignete Verteilungen modellieren
- die Verteilung des Gesamtschadens berechnen und analysieren
- die Ruinwahrscheinlichkeit abschätzen
- statistische Verfahren für die Versicherungspraxis anwenden

können. Der Schwerpunkt dieser Vorlesung liegt somit auf der quantitativen Versicherungstheorie. Zusätzlich werden Sie einiges über die Versicherungspraxis erfahren. Bei der Darstellung derselben wird ein möglichst objektiver Standpunkt angestrebt, der irgendwo zwischen dem des Bundes der Versicherten und dem des Gesamtverbandes der Versicherungswirtschaft angesiedelt ist. Sie sollten also das Geschehen in der Versicherungswirtschaft durchaus kritisch beobachten, aber auch berücksichtigen, daß die Versicherungswirtschaft ein unverzichtbarer Bestandteil unserer Gesellschaft ist und wohl auch bleiben wird.

1.5 Der Risikobegriff

Es existieren verschiedene Risikobegriffe (siehe vor allem die Vorlesung Versicherungslehre, und Farny, S. 17 ff.) Für unsere Belange betrachten wir Risiko aus wahrscheinlichkeitstheoretischer Sicht: Ein Risiko ist das Ergebnis eines Zufallsexperiments. Mögliche Ergebnisse sind hier Geldbeträge (reelle Zahlen), die nicht negativ sind. Das Ergebnis eines Zufallsexperimentes ist ungewiß, d.h. man weiß vor Ausführung des Experiments nicht, welches Ergebnis eintritt. Dabei ist der Betrachtungszeitpunkt von entscheidender Bedeutung. Was vor dem Ereignis noch als zufällig aufgefaßt werden kann bzw. muß, ist nach dem Ereignis ein Faktum.

Wir unterscheiden zwei wesentliche Arten von Risiko. Wir sprechen vom *Zufallsrisiko* bei der zufälligen Ausprägung von Anzahl und Höhe des eingetretenen Schadens trotz Vorliegen vollständiger Informationen. Dagegen bezeichnen wir die systematische Abweichung in Anzahl und/oder Höhe des Schadens wegen unvollständiger Information über die wahre Schadenverteilung als *Irrtumsrisiko*. Es ist daher eine vernünftige Handlungsmaxime zu suchen, um das aus Zufalls- und Irrtumsrisiko resultierende Gesamtrisiko zu verringern. Dabei ist das Irrtumsrisiko leichter zu beeinflussen als das Zufallsrisiko: es läßt sich nämlich durch statistische Erhebungen und die Anwendung statistischer Verfahren (beliebig) verkleinern. Dies führt zur Devise, die von einigen Versicherungspraktikern vertreten wird:

„Ersetze, wo immer möglich, das *Zufallsrisiko* durch das *Irrtumsrisiko*.“

Das Zufallsrisiko wird durch Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnismöglichkeiten (Verteilungen) beschrieben. Mit dem Begriff Zufallsrisiko verbinden wir die Vorstellung, daß

Schäden in einem Versicherungsvertrag wie Ergebnisse in einem Zufallsexperiment entstehen.

Beispiel 1.1

Der Münzwurf ist ein klassisches Beispiel für ein Zufallsexperiment. Das Ergebnis des Münzwurfes ist ungewiß, und mit einer *fairen* Münze tritt jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0.5 Zahl oder Kopf (Adler) auf. ⁴

Beispiel 1.2

Roulette ist ebenfalls ein klassisches Beispiel für ein Zufallsexperiment. Das Ergebnis eines Roulettespieler ist unbekannt, es ist eine der Zahlen 0 bis 36, und bei einem gut funktionierenden Roulettekessel (hier wäre *fair* nicht der geeignete Begriff) tritt jedes dieser Ereignisse mit Wahrscheinlichkeit $1/37$ auf. ⁵

Besonders wichtig im Zusammenhang mit der Modellierung des Risikos als Zufallsexperiment sind stochastische Modelle. Bevor wir die Modellierung mit Wahrscheinlichkeiten konkretisieren, soll an die Rolle von Modellen zur Beschreibung der Wirklichkeit erinnert werden.

Es gibt theoretische Ansätze für die Beschreibung von Situationen und deren Bewertung. Die Charakterisierung realer Verhältnisse versucht man mittels Modellbildung zu bewerkstelligen. Stochastische Modelle sind Modelle mit Zufallskomponenten, die Situationen beschreiben, in denen wir nicht wissen oder nicht wissen können, was die Zukunft bringt. Ein wissenschaftlicher Ansatz der Modellbildung ist in Graphik 1.1 dargestellt.

Abbildung 1.1: wissenschaftlicher Ansatz zur Modellbildung

Das bedeutet in diesem Kontext:

- Beschreibung des Zufallsmodells durch Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ausgänge des Experiments. Bei vollständiger Information sind diese Wahrscheinlichkeiten bekannt.
- Abgrenzung des Irrtumsrisikos, also des Risikos, daß diese Wahrscheinlichkeiten falsch (im Sinne von: die Realität nicht adäquat beschreibend) sind, vom Zufallsrisiko.
- Betrachtung des statistischen Risikos, d.h. der Gefahr der Ungenauigkeit des Modells infolge ungenügend guter Schätzung der relevanten Parameter.
- Weitere Risikobegriffe sind Änderungsrisiko, Großschadenrisiko und Kumulrisiko.

⁴Es gibt jedoch Menschen, die eine faire Münze so werfen können, daß die Häufigkeit für Kopf deutlich größer als 0.5 ist.

⁵Es gibt Versuche, mit Rechenmethoden die Lage der Kugel aus den Anfangsbedingungen (Geschwindigkeit der Kugel und des Kessels) zu berechnen. Diese Versuche sind zumindest teilweise erfolgreich!

Was ist nun die Rolle der Versicherungsunternehmen hinsichtlich des Risikos ? Die Ungewißheit der Schäden bezüglich Eintrittszeitpunkt, Anzahl und/oder Höhe ist die Existenzgrundlage der Versicherung. Durch Modellbildung wird das Risiko operationalisiert und besser kontrollierbar gemacht. Daher spielt die Mathematik im Produktdesign des Produktes Versicherungsschutz eine wichtige Rolle. Man kann ohne Übertreibung sagen: der Rolle des Ingenieurs in der Automobilbranche (oder einer vergleichbaren Branche) entspricht in der Versicherungswirtschaft die Rolle des Mathematikers oder eines entsprechend mathematisch ausgebildeten Ökonomen. Speziell der Aktuar hat die nötigen Kenntnisse, um flexibel auf die Anforderungen des Marktes- durch Umsetzung der Anforderungen in geeignete neue Produkte- reagieren zu können. ⁶.

⁶Lediglich der sizilianische Aktuar hat hier deutlich bessere Karten:

What is the difference between an American actuary and a Sicilian actuary? — The American actuary can tell the number of people to die in his country next year. The Sicilian actuary can give their names and addresses.

Kapitel 2

Grundbegriffe der Statistik

Der allen Überlegungen zugrundeliegende *Wahrscheinlichkeitsraum* wird mit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ bezeichnet. Dabei ist

- Ω die Menge der Elementarereignisse ω , (also beispielsweise alle möglichen Zustände eines versicherten Gegenstandes)
- \mathcal{A} die σ -Algebra der Ereignisse (Teilmengen von Ω), für die man mit \mathcal{P} Wahrscheinlichkeiten ausrechnen kann. Man nennt \mathcal{A} eine σ -Algebra, wenn die folgenden Axiome gelten:
 1. $\Omega \in \mathcal{A}$
 2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$, wobei $\bar{A} := \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$
 3. $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
- \mathcal{P} ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{A} , d.h. es gelten für die Abbildung $\mathcal{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$ die Axiome
 1. $\forall A \in \mathcal{A} : \mathcal{P}(A) \geq 0$
 2. $\mathcal{P}(\Omega) = 1$
 3. Für Mengen A_i mit $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$, ($i, j = 1, 2, \dots$) gilt:

$$\mathcal{P} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_i)$$

Nur mit dieser Basis treten später keine Verständnisschwierigkeiten auf. Wenn das Konzept der σ -Algebra unbekannt ist, so genügt für die einfachsten Situationen die Vorstellung, daß \mathcal{A} aus *allen* Teilmengen von Ω besteht.

2.1 Zufallsvariablen, Dichten, Zähldichten und Verteilungsfunktionen

Definition 2.1

Zufallsvariable

Eine *Zufallsvariable* ist eine \mathcal{A} -meßbare Funktion

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

die Elementarereignissen eines Wahrscheinlichkeitsraumes in sinnvoller Weise reelle Zahlen so zuordnet, daß für die mit Hilfe dieser Funktion beschriebenen Ereignisse Wahrscheinlichkeiten angebar sind. Hierbei bedeutet *meßbar*, daß

$$\forall t \in \mathbb{R} : \{\omega \in \Omega : X(\omega) < t\} \in \mathcal{A}$$

gilt.

Verteilung

Eine *Verteilung* P einer Zufallsvariable X ist das Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{B} mit

$$P(A) = \mathcal{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B},$$

wobei \mathcal{B} die kleinste σ -Algebra auf den reellen Zahlen \mathbb{R} ist, welche alle Mengen der Form $(-\infty, t)$, $t \in \mathbb{R}$ enthält. Die σ -Algebra \mathcal{B} wird auch *Borelalgebra*, die Elemente von \mathcal{B} Borelmengen genannt. Sie ist der natürliche Definitionsbereich von Verteilungen.

Träger

Der *Träger* einer Verteilung P ist die kleinste abgeschlossene Menge A derart, daß

$$P(A) = \mathcal{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} = 1$$

gilt. D.h.: X nimmt fast sicher (mit Wahrscheinlichkeit 1) Werte in A an, oder die Verteilung von X ist auf A konzentriert.

Verteilungsfunktion

Eine *Verteilungsfunktion* einer Zufallsvariablen X ist die Funktion

$$F(t) = \mathcal{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Will man die Abhängigkeit von X ausdrücken, so schreibt man auch F_X statt F und \mathcal{P}_X statt \mathcal{P} . Da wir sowohl diskrete wie auch stetige Zufallsvariable (auch der gemischte Fall kommt vor!) betrachten, müssen wir obige Begriffe je nach Art der Zufallsvariable unterscheiden.

Begriffe im Diskreten

Eine Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die nur abzählbar viele Werte annimmt (z.Bsp. nur die Werte $0, 1, 2, \dots$), heißt *diskret*. Die zugehörige Verteilung $P = \mathcal{P}^X$ heißt *diskrete*

Verteilung. Nimmt X nur die verschiedenen Werte x_i , ($i = 1, 2, \dots$) an, dann ist die Meßbarkeit von X gerade gegeben durch

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\} \in \mathcal{A}, \quad i = 1, 2, \dots$$

und die Folge der Zahlen

$$p(x_i) := \mathcal{P}^X\{x_i\} = \mathcal{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

nennt man *Zähldichte* von P (bzw. von X). Die Verteilungsfunktion von P ist die kumulierte Zähldichte

$$F(t) = \sum_{x_i \leq t} p(x_i).$$

Begriffe im Stetigen

Man nennt X eine *stetige* Zufallsvariable, wenn die Verteilung P von X sich mit Hilfe einer Dichte $f(x)$ beschreiben läßt. Diese *Dichte* ist eine reellwertige, integrierbare Funktion auf \mathbb{R}

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{mit } \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Mit der Dichte sind die Verteilung

$$P(A) = \int_A f(x) dx$$

und insbesondere auch die Verteilungsfunktion

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

bereits festgelegt. In der Regel (für genügend glattes F) erhält man f als Ableitung der Verteilungsfunktion:

$$F'(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

gemischter Fall

In der Risikotheorie tritt auch der *gemischte Fall* auf, bei dem P in einem Bereich eine Dichte hat, in einzelnen Punkten aber positive Masse (wie eine diskrete Verteilung). Wir schreiben P dann formal als

$$P = (1 - p)P_1 + pP_2$$

mit $0 < p < 1$, P_1 diskret, P_2 stetig und berechnen die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ aus

$$P(A) = (1 - p)P_1(A) + pP_2(A).$$

Wenn P_1, P_2 Verteilungen auf \mathcal{B} sind, so ist auch P eine Verteilung.

2.2 Momente und Erwartungswerte

Ist X eine diskrete Zufallsvariable mit Werten x_1, x_2, \dots , Zähldichte p und gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p(x_i) < \infty,$$

so sagt man, der Erwartungswert von X existiere. Er wird berechnet durch

$$\mathcal{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i).$$

Man kann sich den Erwartungswert auch als *Schwerpunkt* der Verteilung von X veranschaulichen, d.h. den Wert, um den die Zufallsvariable X schwankt.

Ist X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f und gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty,$$

so sagt man, der Erwartungswert von X existiere. Er wird berechnet durch

$$\mathcal{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Im gemischten Fall $P = (1 - p)P_1 + pP_2$, in dem P_1 diskret ist mit der Zähldichte $p(x_i)$ und P_2 stetig ist mit der Dichte $f(x)$, sagt man, der Erwartungswert von X existiere, wenn

$$\sum_i |x_i| p(x_i) < \infty$$

und

$$\int |x| f(x) dx < \infty$$

gilt. In diesem Fall berechnet sich der Erwartungswert so:

$$\mathcal{E}X = (1 - p) \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i) + p \int x f(x) dx.$$

Das *Moment der Ordnung* k , $k = 1, 2, \dots$ ist definiert als

- im diskreten Fall:

$$m_k = \sum_i x_i^k p(x_i), \text{ falls } \sum_i |x_i^k| p(x_i) < \infty$$

- im stetigen Fall:

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx, \text{ falls } \int_{-\infty}^{\infty} |x^k| f(x) dx < \infty$$

Die Schreibweise $m_k = \mathcal{E}X^k$ läßt sich als k -tes Moment der Zufallsvariable X oder als Erwartungswert der Zufallsvariable X^k lesen. Dies ist das gleiche!

Einige Momente kommen in der Statistik so häufig vor, daß sich für sie eigene Namen eingebürgert haben (siehe auch Tabelle 2.1):

- $\text{Var}(X) := \mathcal{E}(X - \mathcal{E}X)^2 = \mathcal{E}X^2 - (\mathcal{E}X)^2$ ist die *Varianz* von X , also das 2. Moment vermindert um das quadrierte 1. Moment von X . Die Varianz ist ein Maß dafür, wie stark die Werte von X um den Erwartungswert variieren (streuen). So bedeutet $\text{Var}(X) = 0$, daß X konstant ist. In diesem Falle gibt es also eine reelle Zahl a mit $\mathcal{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\} = 1$.

Die Varianz hat einige nützliche Eigenschaften:

- $\text{Var}(X) \geq 0$
- Es gilt die *Verschiebeformel*

$$\mathcal{E}(X - a)^2 = \text{Var}(X) + (\mathcal{E}X - a)^2 \quad (2.1)$$

- $\mathcal{E}(X - a)^2 \stackrel{!}{=} \min$ wird gelöst von $a = \mathcal{E}X$.
- $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$.
- Sei $\mathcal{P}\{X = a\} = 1 - \mathcal{P}\{X = b\} = p$. Dann gilt

$$\text{Var}(X) = (b - a)^2 p(1 - p)$$

- $\sqrt{\text{Var}(X)}$ ist die *Standardabweichung* von X . Die Standardabweichung hat gegenüber der Varianz den Vorteil, daß sie die gleiche Skalierung besitzt wie die zugrundeliegenden Daten.
- $\text{VarK}(X) := \sqrt{\text{Var}(X)}/\mathcal{E}X$ ist der *Variationskoeffizient* von X . Der Variationskoeffizient ist ein skaleninvariantes Maß für das Risiko in großen Versicherungsbeständen. Wie unten gezeigt wird, gilt unter der Voraussetzung der stochastischen Unabhängigkeit von X_1, X_2, \dots in vielen Fällen

$$\text{VarK}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)}}{\sum_{i=1}^n \mathcal{E}X_i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

So gilt beispielsweise im Falle identischer Erwartungswerte $\mathcal{E}X_i = \mu > 0$ und identischer Varianzen $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$:

$$\text{VarK}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}\mu} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Siehe hierzu auch Tabelle (2.1).

Dies Ergebnis steht im Zusammenhang mit dem Gesetz der großen Zahlen, das ebenfalls später (Kapitel 2.9) behandelt wird. Hier sei nur darauf hingewiesen, daß es auch als „Produktionsgesetz der Versicherungstechnik“ bezeichnet wird und die Ursache für den Risikoausgleich im Kollektiv ist.

Die Varianz ist in der Regel weniger gutmütig. Es gilt vielmehr häufig

$$\text{Var}(X_1 + \cdots + X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

- Das dritte zentrierte Moment, normiert durch die Standardabweichung hoch drei,

$$\frac{\mathcal{E}(X - \mathcal{E}X)^3}{\text{Var}(X)^{\frac{3}{2}}}$$

nennt man *Schiefe* von X . Die in der Praxis zu beobachtenden Schadenhöhen werden mit rechtsschiefen Verteilungen modelliert, d.h. mit Verteilungen, deren Schiefe positiv ist.

Anhand der Tabelle (2.1) läßt sich das Verhalten einiger der zuvor erwähnten Größen bei wachsender Zahl der Risiken gut erkennen.

Zahl der Risiken	kollektiver Erwartungsschaden	Varianz	Standardabweichung	Variationskoeffizient
1	0,1	0,09	0,3000	3,0000
2	0,2	0,18	0,4243	2,1213
3	0,3	0,27	0,5196	1,7321
4	0,4	0,36	0,6000	1,5000
5	0,5	0,45	0,6708	1,3416
6	0,6	0,54	0,7348	1,2247
7	0,7	0,63	0,7937	1,1339
8	0,8	0,72	0,8485	1,0607
9	0,9	0,81	0,9000	1,0000
10	1,0	0,90	0,9487	0,9487
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
100	10,0	9,00	3,0000	0,3000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1000	100,0	90,00	9,4868	0,0949
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1 000 000	100 000,0	900,00	30,0000	0,0003

Tabelle 2.1: Risikoausgleich im Kollektiv am Beispiel von einjährigen Risikolebensversicherungen mit Versicherungssumme 1 und einjähriger Sterbewahrscheinlichkeit 0,1

2.3 Stochastische Unabhängigkeit und Faltungen

2.3.1 Stochastische Unabhängigkeit

Zufallsvariable X_1, \dots, X_n auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ heißen *stochastisch unabhängig*, wenn für beliebige Mengen A_1, \dots, A_n mit $A_i \in \mathcal{B}$

$$\mathcal{P}\{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \in A_i, i = 1, \dots, n\} = \prod_{i=1}^n \mathcal{P}\{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \in A_i\}$$

gilt.

Beispiel 2.1

Die Spielergebnisse beim Roulette werden als stochastisch unabhängige Zufallsvariable modelliert, da die Eintrittswahrscheinlichkeit des nächsten Ergebnisses gänzlich unabhängig ist von der gesamten Vorgeschichte ist. Entsprechend gilt: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beim Roulette nach 10-mal „rot“ nochmals „rot“ kommt, ist $18/37$.

Das gemeinsame zufällige Verhalten von beliebigen Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n wird beschrieben durch

- die (gemeinsame) Zähldichte $p(x_1, \dots, x_n)$ im diskreten Fall. Hier bedeutet stochastische Unabhängigkeit die Faktorisierung der Zähldichte

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_i(x_i), \quad p_i \text{ Zähldichte von } X_i.$$

- die (gemeinsame) Dichte $f(x_1, \dots, x_n)$ im stetigen Fall.

$$\mathcal{P}\{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \in A_i, i = 1, \dots, n\} = \int_{A_1} \cdots \int_{A_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

Hier bedeutet stochastische Unabhängigkeit die Faktorisierung der Dichte

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i), \quad f_i \text{ Dichte von } X_i.$$

2.3.2 Satz von Fubini

Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerten in Modellen mit stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen ist für versicherungsmathematische Fragen äußerst wichtig. Deshalb soll hier zum Auffrischen die Rechenregel von Fubini dargestellt und an einem Beispiel erläutert werden. Wir betrachten hier nur den stetigen Fall; der diskrete und der gemischte Fall wird analog behandelt.

Seien X_1, \dots, X_n stochastisch unabhängige Zufallsvariable, deren gemeinsame Dichte durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

gegeben ist. Wir wollen den Erwartungswert der Zufallsvariable

$$Z = g(X_1, \dots, X_n)$$

berechnen. Dies geht mit sukzessivem Ausintegrieren:

Satz 2.1 (Satz von Fubini)

Ist $Z = g(X_1, \dots, X_n)$ integrierbar und ist

$$g_1(x_2, \dots, x_n) = Eg(X_1, x_2, \dots, x_n),$$

so gilt

$$EZ = Eg_1(X_2, \dots, X_n).$$

Wir gehen aus von

$$EZ = \int g(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n f_i(x_i) d(x_1, \dots, x_n).$$

Das obige Mehrfachintegral kann man berechnen, indem man nacheinander nach den Integrationsvariablen x_1, \dots, x_n ausintegriert, also

$$EZ = \int \dots \int g(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n f_i(x_i) dx_1 \dots dx_n.$$

Unsere Funktion g_1 ist gerade

$$g_1(x_2, \dots, x_n) = \int g(x_1, \dots, x_n) f_1(x_1) dx_1,$$

und dieses Integral wird in obiger Darstellung als innerstes Integral berechnet. Nach dem ersten Ausintegrieren erhalten wir also

$$\int g_1(x_2, \dots, x_n) \prod_{i=2}^n f_i(x_i) dx_2 \dots dx_n,$$

was mit

$$Eg_1(X_2, \dots, X_n)$$

übereinstimmt.

Beispiel 2.2

Als Beispiel betrachten wir zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariable X, Y und berechnen $E(X - Y)^2$. Für jede Zahl y ist nach der Verschiebeformel

$$g(y) := E(X - y)^2 = \text{Var}(X) + (EX - y)^2.$$

Nach Fubini gilt

$$\begin{aligned} E(X - Y)^2 &= Eg(Y) = E(\text{Var}(X) + (EX - Y)^2) = \\ &\text{Var}(X) + E(EX - Y)^2 = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + (EX - EY)^2. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir nochmals die Verschiebeformel benutzt:

$$E(EX - Y)^2 = \text{Var}(Y) + (EX - EY)^2.$$

2.3.3 Korrelation

Sind X und Y stochastisch unabhängige Zufallsvariable mit existierendem (d.h. endlichem) Erwartungswert, so ist auch $X \cdot Y$ Zufallsvariable mit existierendem Erwartungswert und es gilt

$$\mathcal{E}(X \cdot Y) = \mathcal{E}X \cdot \mathcal{E}Y$$

Allgemein - also auch für nicht stochastisch unabhängige X, Y - wird die *Kovarianz* definiert als

$$\text{Kov}(X, Y) := \mathcal{E}((X - \mathcal{E}X)(Y - \mathcal{E}Y)),$$

sofern der Erwartungswert auf der rechten Seite der Gleichung existiert. Es gelten

1. $\text{Kov}(X, X) = \text{Var}(X)$
2. $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Kov}(X, Y)$
3. $\text{Kov}(X, Y) = 0 \iff \mathcal{E}(X \cdot Y) = \mathcal{E}X \cdot \mathcal{E}Y$

Für stochastisch unabhängige X_1, \dots, X_n gilt demzufolge $\text{Kov}(X_i, X_j) = 0$ für alle $i \neq j$ und damit

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i).$$

Desweiteren definieren wir den *Korrelationskoeffizienten*

$$\rho_{XY} := \frac{\text{Kov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

Dieser Parameter liegt immer zwischen -1 und 1. Er wird als Maß für die lineare Abhängigkeit zwischen X und Y benutzt; so gilt beispielsweise $\rho_{XY}^2 = 1$ genau dann, wenn Zahlen a, b existieren mit $X = aY + b$. Im Falle $a > 0$ gilt dann $\rho_{XY} = 1$, und im Falle $a < 0$ gilt $\rho_{XY} = -1$.

2.3.4 Faltung

In der Versicherungspraxis kommt die Faltung von Verteilungen in folgendem Zusammenhang vor:

Sei X_i die Schadensumme eines Geschäftsjahres aus dem i -ten Vertrag, modelliert als Zufallsvariable mit Verteilung $P_i = \mathcal{P}^{X_i}$. Die n Verträge des Bestandes werden als stochastisch unabhängig angenommen. Gesucht ist die Verteilung von

$$S := X_1 + \dots + X_n.$$

Deren Momente sind leicht zu berechnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}S &= \sum \mathcal{E}X_i \\ \mathcal{E}S^2 &= \sum_i \text{Var}(X_i) + \left(\sum \mathcal{E}X_i\right)^2 \\ \text{Var}(S) &= \sum_i \text{Var}(X_i) \end{aligned}$$

Die Gesamtschadenverteilung selbst, also die Verteilung von S , ist jedoch nicht so leicht zu berechnen. Hierzu benötigt man die Faltungen.

Definition 2.2

Sind P und Q Verteilungen, so definiert man die Faltung $P*Q$ von P und Q als die Verteilung von $X + Y$, wobei X und Y stochastisch unabhängig sind mit $X \sim P, Y \sim Q$.

Beispiel 2.3

Sei $a \in \mathbb{R}$, X, Y diskrete Zufallsvariable mit Träger x_1, x_2, \dots . Dann ist

$$\begin{aligned}
 P * Q\{a\} &= \mathcal{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) + Y(\omega) = a\} \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a - x_i, Y(\omega) = x_i\} \\
 &\stackrel{\text{st.u.}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a - x_i\} \mathcal{P}\{\omega \in \Omega : Y(\omega) = x_i\} \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} P\{a - x_i\} Q\{x_i\}
 \end{aligned}$$

Dies liefert die allgemeine Faltungsformel für den diskreten Fall:

$$P * Q\{a\} = \sum_{b \in \mathbb{R}} P\{a - b\} Q\{b\}$$

Im stetigen Fall (f Dichte von X , g Dichte von Y) hat $P * Q$ die Dichte

$$h(x) = \int f(x - y)g(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

Für die Faltung gilt das Assoziativgesetz, so daß wir definieren können:

$$P_1 * \dots * P_n := P_1 * (P_2 * \dots * P_n) = (P_1 * \dots * P_{n-1}) * P_n$$

Falls alle $P_i = P_j$, so führen wir eine weitere, abkürzende Schreibweise ein:

$$\begin{aligned}
 P^{*n} &:= \underbrace{P * \dots * P}_{n \text{ Faktoren}}, \quad n \geq 2 \\
 P^{*1} &:= P \\
 P^{*0}(A) &:= 1_A(0)
 \end{aligned}$$

Man kann sich P^{*0} als die Verteilung der Konstanten „Null“ vorstellen.

Beispiel 2.4

Seien P_1 und P_2 zwei Zufallsvariablen mit Zähldichte

$$P_i\{1\} = 1 - P_i\{0\} = p, \quad i = 1, 2.$$

Dann hat $P_1 * P_2$ Masse auf den Zahlen 0, 1, 2 und die Zähldichten

$$\begin{aligned}
 P_1 * P_2\{0\} &= \sum_b P_1\{0 - b\} P_2\{b\} = P_1\{0\} P_2\{0\} = (1 - p)^2 \\
 P_1 * P_2\{1\} &= \sum_b P_1\{1 - b\} P_2\{b\} = P_1\{1\} P_2\{0\} + P_1\{0\} P_2\{1\} = 2p(1 - p) \\
 P_1 * P_2\{2\} &= \sum_b P_1\{2 - b\} P_2\{b\} = P_1\{1\} P_2\{1\} = p^2
 \end{aligned}$$

Allgemeiner gilt

$$P_1^{*n}\{k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

und man erkennt, daß P_1^{*n} gerade die Binomialverteilung $b(n, p)$ ist.

→ [faltun.xpl](#)

Beispiel 2.5

Seien $P_1 = \text{Exp}(a)$ und $P_2 = \text{Exp}(b)$ zwei Verteilungen mit $a \neq b$. P_1 hat daher die Dichte ae^{-ax} , $x > 0$, P_2 hat die Dichte be^{-bx} , $x > 0$. Dann hat $P_1 * P_2$ die Dichte

$$h(x) = \int_0^x ae^{-a(x-y)} be^{-by} dy = \frac{ab}{a-b} (e^{-bx} - e^{-ax}), \quad x > 0$$

Dabei ist zu beachten, daß $y > 0$ und $x - y > 0$ gelten müssen.

2.4 Beispiele für Verteilungen

Da die Zufallsvariable X in der Risikotheorie im allgemeinen für einen Schaden steht, also insbesondere nichtnegativ ist, haben diejenigen Verteilungen besondere Bedeutung, deren Träger der rechte Halbstrahl $[0, \infty)$ ist.

Die Vielzahl möglicher Verteilungen, die im folgenden verwandt werden, darf nicht erschrecken. Je mehr Verteilungen man kennt, umso besser kann man Modellbeschreibungen für die Realität finden (in Analogie zum Wortschatz eines Schriftstellers). Durch Transformation entstehen zusätzliche Verteilungen. Der Transformations-Mechanismus sollte daher beherrscht werden¹.

Um mit den Verteilungen vertraut zu werden, ist es eine gute Übung, die (Zähl)Dichte-Eigenschaft

$$\int_0^\infty f(x) dx = 1 \quad \text{bzw.} \quad \sum_x p(x) = 1$$

der folgenden Verteilungen nachzuprüfen sowie die ersten Momente und die Varianz der Verteilungen zu bestimmen.

Aus früheren Vorlesungen oder der Schule sollten die folgenden Verteilungen mehr oder weniger bekannt sein:

- Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$
- Exponentialverteilung $\text{Exp}(a)$

¹Auf diese Weise entstehen beispielsweise aus der Normalverteilung die LogNormalverteilung oder aus der Gammaverteilung die LogGammaverteilung (s. Anhang B).

- Poissonverteilung $\pi(\lambda)$
- Binomialverteilung $B(n, p)$

Ihre wichtigsten Kenndaten sind „steckbriefartig“ im Anhang aufgeführt. Etwas weniger bekannt sind dagegen vermutlich die folgenden Verteilungen, deren Kenndaten ebenfalls im Anhang aufgelistet sind.

2.4.1 Gleichverteilung

Die Gleichverteilung ist Ihnen wohl doch bekannt; sie liegt der Erzeugung von Zufallszahlen im Computer (zumindest als Idee) zugrunde. Die Gleichverteilung hat eine Dichte $f(x)$, die auf einem Intervall (a, b) eine positive Konstante ist und außerhalb dieses Intervalls Null ist. Also: $f(x) = 1/(b - a)$ für $a < x < b$, und $f(x) = 0$ für alle anderen Werte x . Präziser spricht man von der Gleichverteilung auf dem Intervall (a, b) . Für $a = 0, b = 1$ sagen wir kurz Gleichverteilung (ohne den Zusatz, der das Intervall bezeichnet).

Bemerkungen:

- Die Gleichverteilung auf (a, b) hat erstes Moment $(a + b)/2$.
- Die Schiefe ist Null.
- Die Varianz ist $(b - a)^2/12$.

2.4.2 Pareto-Verteilung

Die Pareto-Verteilung hat viel Masse auf großen Werten. Dadurch bietet sie sich für die Modellierung von Großschäden an.

Wir unterscheiden drei Varianten der Pareto-Verteilung anhand ihrer Dichten:

Bezeichnung	Dichte
$Par^*(a, 1)$	$x \rightarrow ax^{-(a+1)}, \quad x > 1, a > 0$
$Par^*(a, b)$	$x \rightarrow \frac{a}{b} \left(\frac{x}{b}\right)^{-(a+1)}, \quad x > b, a > 0, b > 0$
$Par(a, b)$	$x \rightarrow \frac{a}{b} \left(1 + \frac{x}{b}\right)^{-(a+1)}, \quad x > 0, a > 0, b > 0$

Bemerkungen:

- Die $Par(a, b)$ -Verteilung wird auch *um b verschobene Pareto-Verteilung* genannt.
- Für diese Pareto-Verteilungen sind nicht alle Momente endlich.

- Die Pareto-Verteilung kann durch Transformation aus der Exponential-Verteilung gewonnen werden, nämlich auf folgende Art: Sei $X \sim \text{Exp}(a)$; dann ist $Y = e^X \text{Par}^*(a, 1)$ -verteilt.

2.4.3 Gamma-Verteilung

Die Gamma-Verteilung $\Gamma(\alpha, \beta)$ (siehe auch B.2.3) mit den Parametern $\alpha > 0, \beta > 0$ hat die Dichte

$$x \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0.$$

Hierbei ist

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t > 0.$$

Bemerkungen:

- Für den Fall $\alpha = 1$ reduziert sich die Gamma-Verteilung zur $\text{Exp}(\beta)$ -Verteilung.
- Zur Berechnung von Momenten ist die Formel

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$$

hilfreich. Ferner gilt

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

2.4.4 Weibull-Verteilung

Die Weibull-Verteilung $W(\alpha, \beta)$ (siehe B.2.5) mit den Parametern $\alpha > 0, \beta > 0$ hat die Dichte

$$x \rightarrow \alpha \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta}, \quad x > 0$$

Bemerkungen:

- Für $\beta = 1$ ergibt sich auch hier die $\text{Exp}(\alpha)$ -Verteilung.
- Die Weibull-Verteilung läßt sich durch Transformation aus der Exponential-Verteilung gewinnen: Sei $X \sim \text{Exp}(a)$, dann ist $Y = X^{1/b} W(a, b)$ -verteilt.

2.4.5 Logarithmische Verteilung

Die logarithmische Verteilung $L(p)$ (siehe B.1.5) mit dem Parameter $p > 0$ hat die Zähldichte

$$p(k) = (-\ln(1-p))^{-1} \frac{p^k}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

2.4.6 Negative Binomial-Verteilung

Die negative Binomial-Verteilung $NB(r, p)$ (siehe B.1.4) mit den Parametern $r > 0, p \in (0, 1)$ hat die Zähldichte

$$p(k) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Dies ist für ganzzahliges r die Wahrscheinlichkeit für genau k Mißerfolge vor dem r -ten Erfolg bei einer Folge von Bernoulli-Experimenten mit Erfolgswahrscheinlichkeit $0 < p < 1$.

2.5 Quantiltransformation und Transformation von Verteilungen

Definition 2.3

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F(t)$. Dann ist die *Quantiltransformierte* die Funktion

$$F^-(\alpha) := \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) > \alpha\}.$$

F^- wird benutzt, um für Monte-Carlo-Simulationen aus einer gleichverteilten Zufallsvariablen U eine Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion $F(t)$ zu berechnen:

$$X = F^-(U)$$

Beispiel 2.6

Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit $\mathcal{P}\{X = 1\} = 1 - \mathcal{P}\{X = 0\} = p \in (0, 1)$. Dann hat X die Verteilungsfunktion

$$F(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 - p, & 0 \leq t < 1 \\ 1 & , t \geq 1 \end{cases}.$$

Wir wollen nun $F^-(\alpha)$ berechnen. Dabei unterscheiden wir zwei Fälle:

$\alpha \geq 1 - p$:

$$F(s) > \alpha \geq 1 - p \Rightarrow s \geq 1$$

$0 \leq \alpha < 1 - p$:

$$F(s) > \alpha \geq 0 \Rightarrow s \geq 0$$

Also haben wir

$$F^-(\alpha) = \begin{cases} 1, & 1 - p \leq \alpha \leq 1 \\ 0, & 0 \leq \alpha < 1 - p \end{cases},$$

sodaß für $X = F^{-1}(U)$

$$\mathcal{P}\{X = 1\} = 1 - (1 - p) = p, \quad \mathcal{P}\{X = 0\} = 1 - p$$

gilt.

Bemerkung: Ist im stetigen Fall F invertierbar, so gilt

$$F^{-} = F^{-1}.$$

Beispiel 2.7

Sei $X \sim \text{Exp}(1)$. Dann ist $F(t) = 1 - e^{-t}$, $t > 0$, also $F^{-1}(\alpha) = -\ln(1 - \alpha)$. Somit erhalten wir als $\text{Exp}(1)$ -Zufallsvariable

$$X = -\ln(1 - U) \quad \text{bzw.} \quad X = -\ln U.$$

Letzte Beziehung gilt, weil $1 - U$ dieselbe Verteilung hat wie U .

Einige spezielle Transformationen helfen mitunter weiter:

- Sei Y normalverteilt. Dann ist $X = e^Y$ lognormalverteilt.
- Seien U_1 und U_2 unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen. Dann ist

$$X = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$$

$N(0,1)$ -verteilt. Diese Beziehung wird vielleicht etwas plausibel (herleiten können wir sie hier nicht) durch folgende Eigenschaften normalverteilter Größen: Sind X_1, X_2 stochastisch unabhängig mit Verteilung $N(0, 1)$, dann sind die Parameter r, ϕ der Darstellung in Polarkoordinaten

$$X_1 = r \cos(2\pi\phi)$$

$$X_2 = r \sin(2\pi\phi)$$

stochastisch unabhängig, ϕ ist gleichverteilt auf $[0,1]$, und r hat eine Chiquadrat-Verteilung mit zwei Freiheitsgraden, also r^2 eine Exponentialverteilung. Identifiziert man ϕ mit U_2 und r mit $\sqrt{-2 \ln U_1}$, so landet man bei obiger Darstellung.

- Seien Y_i , $i \in \mathbb{N}$ stochastisch unabhängige, $\text{Exp}(1)$ -verteilte Zufallsvariablen. Dann ist $X = \max\{k | Y_1 + \dots + Y_k \leq \lambda\}$ $\pi(\lambda)$ -verteilt. Dies bedeutet beispielsweise $X = 0$ für $Y_1 > \lambda$, $X = 1$ bei $Y_1 \leq \lambda \wedge Y_1 + Y_2 > \lambda$ usw.

Satz 2.2

(Substitutionsregel) Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine invertierbare Funktion. Dann hat die Zufallsvariable $Y = h(X)$ die Verteilungsfunktion

$$F(h^{-1}(t))$$

und die Dichte

$$f(h^{-1}(t)) \cdot (h^{-1})'(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Beispiel 2.8

Sei $X \sim \text{Exp}(\theta)$ und $h(x) = x^2$. h ist auf $[0, \infty)$ invertierbar, was hier ausreicht. $Y = h(X)$ hat eine Dichte, die sich mit $h^{-1}(x) = \sqrt{x}$ und $(h^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ zu

$$f(h^{-1}(x)) \cdot (h^{-1})'(x) = \theta e^{-\theta\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

ergibt.

Durch Transformationen können Verteilungen entstehen, die weder stetig noch diskret sind. Diese Fälle sind im Versicherungsbereich sogar häufig. Wir betrachten daher zunächst die beiden Grundkonstruktionen. Dabei sei X die Zufallsvariable der Schadenhöhe und Y die der Entschädigung.

2.5.1 Haftungsobergrenze (Erstrisikoversicherung)

Der Versicherer leistet im Schadenfall eine Entschädigung in Höhe des Schadens, jedoch begrenzt durch eine *Haftungsobergrenze* M , auch *Höchstentschädigung* oder *Versicherungssumme* genannt. Dies drückt man aus durch

$$Y = \begin{cases} X, & X \leq M \\ M, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Auch wenn X eine Dichte f hat, muß Y keine stetige Verteilung haben. Vielmehr kann $\mathcal{P}\{Y = M\} = \mathcal{P}\{X \geq M\} = p > 0$ gelten. Wir definieren daher für beliebige Mengen A :

$$\mathcal{P}\{Y \in A\} = \int_{A \cap [0, M)} f(x) dx + p 1_A(M)$$

(Die Masse von X rechts von M wird bei Y im Punkte M konzentriert.)

2.5.2 Selbstbeteiligung (Zweitrisikoversicherung)

Der Versicherer leistet im Schadenfall eine Entschädigung in Höhe des Schadens abzüglich einer vertraglich vereinbarten *Selbstbeteiligung* (*Selbstbehalt*, *Abzugsfranchise*), Schäden unterhalb der Selbstbeteiligung (des Erstrisikos) trägt der Versicherungsnehmer selbst:

$$Y = \begin{cases} X - M, & X > M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Auch hier ist wieder der Fall der gemischten Verteilung von Y trotz der Existenz einer Dichte von X möglich ($\mathcal{P}\{Y = 0\} = \mathcal{P}\{X \leq M\} = p > 0$), weswegen wir für allgemeine Ereignisse $A \in \mathcal{B}$

$$\mathcal{P}\{Y \in A\} = \int_A f(x + M) dx + p 1_A(0)$$

erhalten. Die Dichte von X wird um M nach links verschoben, und die Masse, die nach der Verschiebung auf dem negativen Halbstrahl liegt, wird im Punkte 0 konzentriert.

Selbstverständlich kann man die beiden Grundkonstruktionen beliebig kombinieren, was dem Leser zur Übung empfohlen sei.

2.6 Charakteristische, momenterzeugende und erzeugende Funktionen

Definition 2.4

Sei X eine Zufallsvariable. Dann heißt die Funktion $CF_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$CF_X(t) := \mathcal{E}e^{itX} = \mathcal{E} \cos(tX) + i\mathcal{E} \sin(tX)$$

die *charakteristische Funktion* von X bzw. von der Verteilung von X . Hierbei ist \mathbb{C} die Menge der komplexen Zahlen.

Definition 2.5

Sei X eine Zufallsvariable. Dann heißt die partielle Abbildung $MEF_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$MEF_X(t) := \mathcal{E}e^{tX}$$

die *momenterzeugende Funktion* von X . Partiiell bedeutet hier, daß der Wert für $MEF_X(t)$ nicht für alle Zahlen t definiert ist

Definition 2.6

Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Träger $\{0, 1, 2, \dots\}$. Man denke dabei an eine Schanzahlverteilung. Dann heißt die Funktion $EF : \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$EF_X(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}\{X = n\}z^n$$

die *erzeugende Funktion* von X .

Bemerkungen:

- Die charakteristische Funktion ist für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert, die momenterzeugende Funktion nicht. Die erzeugende Funktion ist auf dem komplexen Einheitskreis $\{z : |z| \leq 1\}$ überall definiert.
- Der Name momenterzeugende Funktion ist abgeleitet aus der Tatsache, daß die k -ten Ableitungen von MEF_X in Null die k -ten Momente von X sind:

$$m_k(X) = MEF_X^{(k)}(0).$$

- Die erzeugende Funktion ist nur für diskrete Verteilungen auf $\{0, 1, 2, \dots\}$ definiert.
- Es gelten die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} CF_X(t) &= MEF_X(it) \\ CF_X(t) &= EF_X(e^{it}) \\ EF_X(z) &= MEF_X(\ln z) \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt sich aus

$$\begin{aligned} MEF_X(\ln z) &= \mathcal{E} \exp(X \ln(z)) = \mathcal{E} z^X = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathcal{P}\{X = n\} = EF_X(z). \end{aligned}$$

- $\mathcal{P}\{X = n\} = \frac{1}{n!} \cdot EF_X^{(n)}(0)$, wobei $EF_X^{(n)}$ die n -te Ableitung von EF_X bezeichnet.
- $\mathcal{P}\{X = n\} = \frac{1}{n!} \cdot EF_X^{(n)}(0)$, wobei $EF_X^{(n)}$ die n -te Ableitung von EF_X bezeichnet.

Diese Hilfsgrößen sind für die Risikotheorie fundamental, da sie sich bei Faltungen sehr einfach verhalten. Unser Thema lautet daher

2.7 nochmals Faltungen

Satz 2.3

(Faltungssatz) Seien X, Y stochastisch unabhängige Zufallsvariablen. Dann gilt:

- $CF_{X+Y}(t) = CF_X(t) \cdot CF_Y(t)$ für alle t .
- $MEF_{X+Y}(t) = MEF_X(t) \cdot MEF_Y(t)$ für alle t , für die beide Seiten dieser Gleichung definiert sind.
- $EF_{X+Y}(z) = EF_X(z) \cdot EF_Y(z)$ für alle $|z| \leq 1$.

Analoge Produktformeln ergeben sich für die Faltung von mehr als zwei Verteilungen. Aus den charakteristischen Funktionen, die sich oben als nützlich für die Faltung erwiesen haben, kann man den Momenten entsprechende Verteilungsparameter bilden, die bei Faltungen ebenso gut reagieren.

Definition 2.7

Ist das m -te Moment der Verteilung von X endlich, so nennt man die m -te Ableitung des Logarithmus der momenterzeugenden Funktion im Punkte Null, also

$$\frac{d}{dt} \log MEF_X(t)|_{t=0}$$

m -te Kumulante von X . Wir benutzen für die Kumulanten die Schreibweise $\kappa_m(X)$.

Die Existenz des m -ten Momentes von X gewährleistet, daß die entsprechende Ableitung auch gebildet werden kann. Für $m = 1, 2, 3$ sind die Kumulanten $\kappa_m(X)$ alte Bekannte:

$$\kappa_1(X) = \mathcal{E}X =: \mu,$$

$$\kappa_2(X) = \text{Var}(X),$$

und

$$\kappa_3(X) = \mathcal{E}(X - \mu)^3.$$

Aus dem Satz 2.3 kann man leicht ablesen, daß für stochastisch unabhängige Zufallsvariable X, Y die Beziehung

$$\kappa_m(X + Y) = \kappa_m(X) + \kappa_m(Y)$$

gilt.

Satz 2.4

(Eindeutigkeitssatz) Seien X und Y zwei beliebige Zufallsvariablen mit den zugehörigen Verteilungen P und Q . Dann gilt:

- $\forall t \in \mathbb{R} : CF_X(t) = CF_Y(t) \implies P = Q$
- $\forall z$ mit $|z| < 1 : EF_X(z) = EF_Y(z) \implies P = Q$
- $\forall t$ mit $a < t < b : MEF_X(t) = MEF_Y(t) \implies P = Q$

Hierbei soll $MEF_X(t)$ und $MEF_Y(t)$ für $a < t < b$ existieren.

Dieser Satz ermöglicht es, die Verteilung einer Zufallsvariablen an obigen Hilfgrößen zu identifizieren.

Definition 2.8

Seien X_n Zufallsvariablen mit Verteilung P_n , $n = 0, 1, 2, \dots$. Wir sagen, P_n konvergiere schwach gegen die (Grenz-)Verteilung P_0 , in Zeichen

$$P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_0 \text{ schwach,}$$

falls

$$\forall t \text{ mit } P_0\{t\} = 0 : P_n(-\infty, t] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_0(-\infty, t]$$

Satz 2.5

(Stetigkeitssatz) Seien X_n wieder Zufallsvariablen mit Verteilung P_n , $n = 0, 1, 2, \dots$. Dann gilt:

- $\forall t : CF_{X_n}(t) \longrightarrow CF_{X_0}(t) \implies P_n \longrightarrow P_0$ schwach
- $\forall z$ mit $|z| \leq 1 : EF_{X_n}(z) \longrightarrow EF_{X_0}(z) \implies \forall A \in \mathcal{B} : P_n\{A\} \longrightarrow P_0\{A\}$

Die zweite Implikation gilt nur für Schadenzahlverteilungen.

Beispiel 2.9

$b(n, p_n) = b(1, p_n)^{*n}$ hat die erzeugende Funktion $z \mapsto (1 - p_n + p_n z)^n$. Für den Fall $p_n = \frac{\lambda}{n}$, $\lambda > 0$ erhalten wir

$$(1 - p_n + p_n z)^n = \left(1 + \frac{\lambda}{n}(z - 1)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\lambda(z-1)}.$$

Da dies jedoch die erzeugende Funktion von $\pi(\lambda)$ ist, gilt

$$b\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)\{k\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(\lambda)\{k\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

im Sinne von Satz 2.5, Teil 2.

2.8 Tschebyscheff'sche Ungleichung

Satz 2.6

Sei X eine beliebige Zufallsvariable, $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ eine monotone Funktion sowie $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$\mathcal{P}\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| \geq \varepsilon\} \leq \mathcal{E}(g(X))/g(\varepsilon).$$

Speziell gilt für $g(x) = x^2$ und mit $|X(\omega) - \mathcal{E}X|$ statt $X(\omega)$ die Abschätzung

$$\mathcal{P}\{\omega \in \Omega : |X(\omega) - \mathcal{E}X| \geq \varepsilon\} \leq \text{Var}(X)/\varepsilon^2.$$

Beispiel 2.10

Seien X_1, X_2, \dots stochastisch unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen. Dann gilt wegen $\text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_1^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum_1^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_1^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n} \text{Var}(X_1)$

$$\mathcal{P}\left\{\omega \in \Omega : \left|\frac{1}{n} \sum_1^n X_i - \mathcal{E}X\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\text{Var}(X_1)}{n\varepsilon^2}$$

Im Fall nicht identisch verteilter Zufallsvariablen gilt stattdessen

$$\mathcal{P}\left\{\omega \in \Omega : \left|\frac{1}{n} \sum_1^n X_i - \frac{1}{n} \sum_1^n \mathcal{E}X_i\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{n^2\varepsilon^2} \sum_1^n \text{Var}(X_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Beispiel 2.11

Wir betrachten ein Versicherungskollektiv von n Verträgen. Sei dabei X_i die Schadenssumme eines Jahres im Vertrag i . Unter Berücksichtigung eines positiven Sicherheitszuschlages ε ergibt sich die Prämie für den i -ten Vertrag zu $\mathcal{E}X_i + \varepsilon$. Dann erhalten wir eine sogenannte *einjährige Ruinwahrscheinlichkeit*

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}\{\text{Schäden} > \text{Prämien}\} \\ &= \mathcal{P}\left\{\omega \in \Omega : \sum_1^n X_i > \sum \mathcal{E}X_i + n\varepsilon\right\} \\ &\leq \mathcal{P}\left\{\omega \in \Omega : \left|\frac{1}{n} \sum X_i - \frac{1}{n} \sum \mathcal{E}X_i\right| > \varepsilon\right\} \\ &\leq \frac{1}{n^2\varepsilon^2} \sum_1^n \text{Var}X_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Weil die rechte Seite für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, wird die Wahrscheinlichkeit auf der linken Seite durch Wachsen des Bestandes beliebig klein, unabhängig von der Größe von ε .

2.9 Die Gesetze der großen Zahlen

Seien X_i identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\mathcal{E}X_i = \mu$, und σ^2 sei ihre Varianz². Dann lauten die beiden Gesetze:

schwaches Gesetz der großen Zahlen:

$$\mathcal{P}\left\{\omega \in \Omega : \left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) - \mu\right| > \varepsilon\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

starkes Gesetz der großen Zahlen:

$$\mathcal{P}\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_1^n X_i(\omega) = \mu\right\} = 1$$

Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt das schwache, die Umkehrung gilt nicht.

Beispiel 2.12

Sei Ω das Intervall $(0, 1)$, $\mathcal{P} = \lambda$. Dabei ist das Längenmaß λ definiert durch $\lambda(a, b) := b - a$. Ferner gelte $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap (0, 1)$, wobei \mathcal{B} die Borelalgebra und \mathcal{A} die zugehörige σ -Algebra ist. Jedes $\omega \in \Omega$ hat eine Dualdarstellung

$$\omega = \sum_{i=1}^n 2^{-i} X_i(\omega)$$

²Dies ist eine Vereinfachung, die jedoch für die Zwecke dieser Vorlesung ausreicht. Beide Gesetze der großen Zahlen gelten für stochastisch unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen auch, wenn die Varianz nicht endlich ist.

mit $X_i(\omega) \in \{0, 1\}$ und $X_i(\omega) = 1$ für unendlich viele i . Die Zufallsvariablen X_i werden Rademacherfunktionen genannt.

Sie haben die Form eines Kammes, der mit wachsendem n immer mehr Zinken hat. Sie sind ferner stochastisch unabhängig und identisch verteilt, was man aus folgender Formel ablesen kann:

$$\mathcal{P}\{\omega \in \Omega : X_i(\omega) = \delta_i, i = 1, \dots, n\} = 2^{-n}, \quad \delta_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n.$$

Die Anzahl der Ziffer «1» in der Dualdarstellung von X_i ist

$$\sum_{i=1}^n X_i(\omega).$$

Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt nun, daß für fast alle ω die relative Häufigkeit der Einsen gegen $\mathcal{E}X_i = \frac{1}{2}$ konvergiert. Nach dem nachfolgenden Satz 2.7 hat die Konvergenz die Geschwindigkeit

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \mathcal{E}X_i) \approx \sqrt{2n\sigma^2 \ln \ln n}$$

Satz 2.7

Satz vom iterierten Logarithmus Seien X_1, X_2, \dots stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit Varianz σ^2 und Erwartungswert μ . Dann gilt:

$$\limsup_n \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sqrt{2n\sigma^2 \ln \ln n}} = +1 \quad \text{fast überall}$$

$$\liminf_n \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sqrt{2n\sigma^2 \ln \ln n}} = -1 \quad \text{fast überall,}$$

d.h. der kleinste Korridor, der im wesentlichen die Folgen $\sum (X_i - \mathcal{E}X_i)$ enthält, ist

$$\left(-\sqrt{2n\sigma^2 \ln \ln n}, +\sqrt{2n\sigma^2 \ln \ln n} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Das bedeutet insbesondere:

Satz 2.8

Seien X_1, X_2, \dots stochastisch unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen, $\mathcal{E}X_i = \mu \geq 0$ (jajwohl, $\mu = 0$ ist zugelassen!) und $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 > 0$, dann gilt:

$\sum_{i=1}^n X_i$ übersteigt jede positive Schranke (für $n \rightarrow \infty$) mit Wahrscheinlichkeit 1, d.h.

$$\mathcal{P}\{\forall n : \sum_{i=1}^n X_i \leq M\} = 0$$

für alle M .

2.10 Grenzwertsätze

Satz 2.9

(Zentraler Grenzwertsatz) Seien X_1, X_2, \dots stochastisch unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Mittelwert μ und positiver endlicher Varianz σ^2 . Für $n = 1, 2, \dots$ betrachten wir die Zufallsvariablen

$$Z_n = \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right) / \sigma.$$

Diese Zufallsvariable sind zentriert und standardisiert, d.h.

$$\mathcal{E}Z_n = 0, \quad \text{Var}(Z_n) = 1.$$

Dann gilt

$$\forall t : \lim_n \mathcal{P} \{Z_n < t\} = \Phi(t),$$

wobei die Konvergenzgeschwindigkeit abgeschätzt werden kann durch

$$|\mathcal{P} \{Z_n < t\} - \Phi(t)| \leq \frac{c\beta}{\sqrt{n}}$$

mit $c = 0,7975$ und $\beta = \mathcal{E}|X_1 - \mathcal{E}X_1|^3 / \sigma^3$. Dabei ist β unabhängig von t .

Der zentrale Grenzwertsatz besagt also, daß die Verteilung der Summe stochastisch unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen für $n \rightarrow \infty$ die Normalverteilung approximiert. Die Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit macht allerdings nur dann Sinn, wenn β bekannt ist. Für die Konstante c gilt genauer: $0,4097 \leq c \leq 0,7975$. Diese theoretische Abschätzung gilt allgemein, also auch im *worst case*. In vielen Fällen ist die Konvergenzgeschwindigkeit deutlich besser. Im folgenden Beispiel liefert die Abschätzung aus Satz 2.9 keine kleinen Werte.

Beispiel 2.13

Seien X_i stochastisch unabhängige binomial(1, p)-verteilte Zufallsvariablen mit $\mathcal{P}\{X_i = 1\} = 1 - \mathcal{P}\{X_i = 0\} = p$, $\mathcal{E}X_i = p$, $\text{Var}(X_i) = p(1-p)$ und $\beta = \frac{1-2p+2p^2}{\sqrt{p(1-p)}}$.

Die Schranke aus Satz 2.9 ist für p nahe bei Null unbrauchbar. (Für $p = 0,001$ ergibt sich beispielsweise $\beta = 31,57$.) Dies muß so sein, weil $b(n, \frac{\lambda}{n})$ gegen $\pi(\lambda) \neq N(0,1)$ konvergiert.

Satz 2.10

Wenn wir die Forderung der identischen Verteilung der X_i fallen lassen, so gilt mit $\beta_i = \mathcal{E}|X_i - \mathcal{E}X_i|^3$ und den zentrierten und standardisierten Summen

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mathcal{E}X_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)}}$$

$$|\mathcal{P} \{Z_n < t\} - \Phi(t)| \leq c \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i}{(\sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i))^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.2)$$

Beispiel 2.14

Sei $S = X_1 + \dots + X_n$ der Gesamtschaden eines Versicherungsunternehmens. Dabei seien die X_i stochastisch unabhängig. Wir versuchen die Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}\{S > t\}$ durch die Normalverteilung zu approximieren:

$$\mathcal{P}\{S > t\} \doteq 1 - \Phi\left(\frac{t - \sum_{i=1}^n \mathcal{E}X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)}}\right)$$

Erfahrungsgemäß funktioniert diese Approximation gut, falls die Schranke (2.2) klein genug ist. Es hat sich gezeigt, daß dies nur bei *sehr großen* Lebensversicherungsbeständen oder großen Kfz-Beständen der Fall ist, falls zusätzlich der Variationskoeffizient des Gesamtschadens $\text{VarK}(S)$ und die Schiefe des Gesamtschadens klein sind.

Umgekehrt funktioniert die Anwendung des Satzes 2.9 nicht bei Großschäden und wenn die Schranke (2.2) groß ist.

Beispiel 2.15

(Konvergenz der Poissonverteilung) Seien X_λ $\pi(\lambda)$ -verteilte Zufallsvariablen mit $\mathcal{E}X_\lambda = \text{Var}(X_\lambda) = \lambda$. Dann liefert uns der Satz 2.9 die Schranke

$$\left| \mathcal{P}\left\{\frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < t\right\} - \Phi(t) \right| \leq \frac{c}{\sqrt{\lambda}}.$$

Begründung: Es gilt

$$\pi(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{*n}.$$

Die Schranke lautete allgemein $\frac{c\beta}{\sqrt{n}}$. Hier ist nun speziell

$$\beta = \frac{\mathcal{E}\left|X\left(\frac{\lambda}{n}\right) - \frac{\lambda}{n}\right|^3}{\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Wir können n nun beliebig wählen und lassen $n \rightarrow \infty$ konvergieren. Dabei konvergiert

$$\frac{\beta}{\sqrt{n}} = \frac{\mathcal{E}\left|X\left(\frac{\lambda}{n}\right) - \frac{\lambda}{n}\right|^3}{\lambda^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Beispiel 2.16

Die Konvergenz in Satz 2.9 ist tatsächlich von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Sind die X_1, X_2, \dots diskret, dann ist $\mathcal{P}\{X_1 + \dots + X_n < t\}$ eine Treppenfunktion mit Sprüngen der Höhe $\mathcal{P}\{X_1 + \dots + X_n = r\}$.

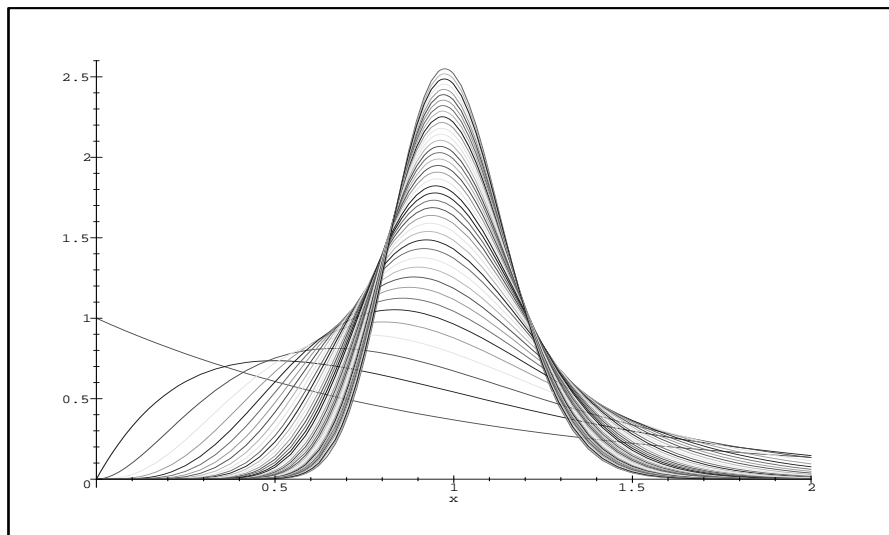


Abbildung 2.1: Faltung

Im Extremfall (zum Beispiel für $\mathcal{P}\{X_i = 1\} = 1 - \mathcal{P}\{X_i = 0\} = p$) gilt

$$\sup_k \mathcal{P}\{X_1 + \dots + X_n = k\} \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

mit $\varepsilon > 0$ unabhängig von n . (Dies ist ein auf der Stirlingschen Formel basierendes Resultat, es wird hier nicht bewiesen.) Also kann die Approximation der Treppenfunktion durch die stetige Funktion $\Phi(t)$ nicht besser sein als $\frac{1}{2}\varepsilon/\sqrt{n}$.

In nächsten Bild werden die skalierten Dichten von Gammaverteilungen

$$\text{Gamma}(n, n)(x * n)n$$

gezeigt, deren Parameter so gewählt sind, daß Konvergenz gegen die Normalverteilung sichtbar wird. Diese Dichten gehören zur standardisierten Summe

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

mit stochastisch unabhängigen zufälligen Veränderlichen X_i , die Verteilung $\text{Exp}(1)$ besitzen.

Mehr über die Normalapproximation und deren Verbesserungen bleiben der Vorlesung Risikotheorie 2 vorbehalten.

Kapitel 3

Kollektives und individuelles Modell der Risikotheorie

3.1 Individuelles Modell

Im individuellen Modell wird der Schadenbedarf des i -ten Vertrages durch die Zufallsvariable X_i beschrieben ($i = 1, 2, \dots, n$). Die X_i seien stochastisch unabhängig, jedoch nicht notwendigerweise identisch verteilt. Für jeden Vertrag sei die Verteilung P_i von X_i bekannt. Dann ist $P = P_1 * \dots * P_n$ die Verteilung von $S = X_1 + \dots + X_n$. P ist zwar das „wahre“ Modell, da in den einzelnen P_i die Ausprägungen aller Tarifmerkmale des i -ten Vertrages berücksichtigt werden können (Ausnutzung der Bestandsdaten¹). Die Auswertung der Faltungsformel für P ist jedoch sehr aufwendig. Man versucht die Rechenprobleme durch Approximationen und rekursive Verfahren zu meistern, worauf in der Vorlesung Risikotheorie 2 näher eingegangen werden wird. Für kleine n und diskrete X_i ist die Berechnung jedoch leicht:

Beispiel 3.1

Wir betrachten einen Risikolebensbestand mit $n = 100$ Verträgen. Weiterhin bezeichnen wir die Versicherungssumme mit s und die Sterbewahrscheinlichkeiten mit p . Es sei $\mathcal{P}\{X = s\} = 1 - \mathcal{P}\{X = 0\} = p$. Die Verträge verteilen sich wie folgt:

¹Im kollektiven Modell werden nur die Schadendaten ausgenutzt.

Sterbewahrscheinlichkeit	Risikosumme					Σ
	1000	2000	3000	4000	5000	
0,000505	0	1	1	2	6	10
0,000525	1	0	2	7	0	10
0,000552	1	1	3	3	2	10
0,000587	0	1	3	3	3	10
0,000630	1	4	0	4	1	10
0,000680	2	2	2	2	2	10
0,000738	1	1	0	1	7	10
0,000805	1	1	1	4	3	10
0,000881	2	2	1	4	1	10
0,000914	3	3	2	1	1	10
Σ	12	16	15	31	26	100

Der Erwartungswert von S berechnet sich zu $\mathcal{E}S = 229,6111$, die Varianz zu $\text{Var}(S) = 900962$. Wieder bezeichnen die P_i , $i = 1, \dots, 100$ die Verteilungen der Schadensumme aus dem i -ten Vertrag. Nun läßt sich $P = P_1 * \dots * P_{100}$ nach der Faltungsformel sukzessive berechnen:

$$\begin{aligned} R_1 &= P_1 \\ R_{k+1} &= R_k * P_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned}$$

wobei $P = R_n$ ist. Zur Vereinfachung der Schreibweise entspreche 1 Geldeinheit einer Versicherungssumme von 1000 DM. Mit $r_k(j) = R_k\{j\}$ bezeichnen wir die Zähldichte von R_k , mit $p_k(j)$ die Zähldichte von P_k und erhalten auf diese Weise die Rekurrenz für die Dichte

$$r_{k+1}(j) = \sum_l r_k(j-l)p_{k+1}(l). \quad (3.1)$$

Wir bezeichnen mit $s_k \in \{1, \dots, 5\}$ die Risikosumme aus Vertrag k . Die Variable l kann in diesem Beispiel nur die beiden Werte 0 und s_k annehmen, die jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $1 - q_k$ und q_k angenommen werden. Dabei sei q_k die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit, $1 - q_k$ die komplementäre einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit. Somit vereinfacht sich die Rekursionsvorschrift (3.1) zu

$$r_{k+1}(j) = r_k(j)(1 - q_{k+1}) + r_k(j - s_k)q_{k+1}.$$

Dabei ist der zweite Term Null für $j < s_k$. Was ist aus Sicht des Versicherers der *worst case*? Wenn in einem Jahr alle 100 Versicherten sterben, wird eine Leistung in Höhe von $26 \cdot 5 + 31 \cdot 4 + 15 \cdot 3 + 16 \cdot 2 + 12 \cdot 1 = 343$ Geldeinheiten fällig². Der Algorithmus benötigt Speicherplatz für ein Array der Länge 344. Dabei entspricht der Array-Index der insgesamt zu zahlenden Versicherungssumme in Geldeinheiten. Der Algorithmus lautet:

$r(0) := 1 - q_1;$

²Dies entspricht vereinbarungsgemäß einer Gesamtversicherungssumme von 343,000 DM.

```

for i:=1 to 343 do r(i):=0;
r(s1):= q1;
for k:=2 to 100 do
  for j:=343 downto 0 do
    r(j):=r(j)(1-qk)
    if j ≥ sk
      then r(j):=r(j)+r(j-sk)qk

```

Das Rückwärtsrechnen ist notwendig, weil das Array r in der inneren `for`-Schleife rechts und links vorkommt. Es muß sichergestellt sein, daß rechts immer die *alten* Werte benutzt werden. Als Resultat erhält man

k	$r(k) = \mathcal{P}\{S = k \cdot 1000\}$	$\sum_{i=1}^k r(i) = \mathcal{P}\{S \leq k \cdot 1000\}$
0	0.93408	0.93408
1	0.00852	0.94260
2	0.01085	0.95345
3	0.00930	0.96275
4	0.01919	0.98194
5	0.01642	0.99836
6	0.00041	0.99877
7	0.00038	0.99915
8	0.00035	0.99950
9	0.00034	0.99984
10	0.00014	0.99998
11	0.00001	0.99999
⋮	⋮	⋮

Auf die möglichen Werte 12 bis 343 (entspricht 12.000 bis 343.000 Versicherungssumme) fällt insgesamt eine Masse kleiner als 10^{-5} . Man beachte die Sprünge der Wahrscheinlichkeiten in der Größe der Zähldichte: kein Toter, ein Toter, zwei Tote,...

Mit diesem simplen Verfahren lassen sich Risikolebensbestände mit bis zu einigen Tausend Verträgen rechnen. Neuere Algorithmen, die Rekursionen benutzen, funktionieren bis zu Bestandsgrößen von ca. 20.000 Verträgen. Probleme treten auf, falls die P_i mehr als zwei Punkte im Träger aufweisen.

3.2 Kollektives Modell

Wieder sei $S = X_1 + \dots + X_n$ die Gesamtschadensumme. Im Gegensatz zum individuellen Modell stützt sie sich jedoch nicht mehr auf den einzelnen Verträgen und ihren Tarifmerkmalen ab, sondern betrachtet eine zufällige Zahl N von Einzelschäden der zufälligen Höhe X_i .

Dabei ist es jetzt wie gesagt bedeutungslos, von welchem Vertrag das einzelne X_i stammt. Insbesondere ist die Ausprägung der Tarifmerkmale einzelner Verträge bedeutungslos. Die Modellierung erfolgt anhand von Erfahrungen und Daten über Schäden in der Vergangenheit. Man macht folgende Annahmen:

- Die X_i sind identisch verteilt .
- N, X_1, X_2, \dots sind stochastisch unabhängig .

Definition 3.1

- Die Verteilung der Anzahl N von Einzelschäden nennt man *Schadenzahlverteilung (SZV)* und bezeichnet sie meist mit dem Symbol R

$$N \sim R.$$

- Die Verteilung der Schadenhöhe eines jeden Schadens nennt man *Schadenhöhenverteilung (SHV)* und bezeichnet sie meist mit dem Symbol Q

$$X_i \sim Q, \quad i = 1, \dots, N.$$

Q hat $(0, \infty)$ als Träger. Das heißt, es sind nur echt positive Schadenhöhen, also insbesondere *nicht* die Schadenhöhe 0, möglich.

- Die Verteilung der Gesamtsumme an Schäden eines Jahres nennt man die *Gesamt Schadenverteilung*

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} R\{k\}Q^{*k}. \quad (3.2)$$

Bemerkungen:

- Die Schadenzahlverteilung wird häufig mit Hilfe von Poisson-, Negativ-Binomial- oder logarithmisch verteilten Zufallsgrößen modelliert.
- Zur Modellierung von Schadenhöhenverteilungen eignen sich insbesondere Gamma-, Log-Gamma- oder Log-Normal-verteilte Zufallsvariablen .
- Die Summenformel (3.2) für P in Definition 3.1 ergibt sich so:

$$\begin{aligned} P(A) &= \mathcal{P}\{S \in A\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}\{S \in A \wedge N = k\} \\ &\stackrel{\text{stoch.unabh.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}\{N = k\} \mathcal{P}\{X_1 + \dots + X_k \in A\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} R\{k\}Q^{*k}(A) \end{aligned}$$

mit $Q^{*0} := \delta_0$, also $Q^{*0}(A) = 1_A(0)$.

Die Modellbildung besticht durch ihre Einfachheit, entzieht sich aber durch ihre Komplexität der meisten Berechnungsversuche. So sind erst seit 1980 Teillösungen, aufbauend auf Rekursionsansätzen, bekannt. Die geschlossene Darstellung von P ist in nur wenigen Fällen möglich. Wichtige Eigenschaften sind

- $\mathcal{E}S = \mathcal{E}N \cdot \mathcal{E}X_1$
- $\text{Var}(S) = \mathcal{E}N\text{Var}(X_1) + \text{Var}(N)(\mathcal{E}X_1)^2$

Im Fall $N \sim \pi$ gilt sogar die einfachere Beziehung $\text{Var}(S) = \mathcal{E}N \cdot \mathcal{E}X_1^2$ sowie

$$\mathcal{E}(S - \mathcal{E}S)^3 = \mathcal{E}N \cdot \mathcal{E}X_1^3.$$

- Ist g charakteristische Funktion von Q , m erzeugende Funktion von R und f charakteristische Funktion von P , dann gilt die *Fundamentalgleichung*

$$f(t) = m(g(t)), \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

Dies sieht man folgendermaßen ein:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \exp(itS) &= \sum_{i=0}^{\infty} R\{n\} \mathcal{E} \exp(it(X_1 + \dots + X_n)) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} R\{n\} g(t)^n = m(g(t)). \end{aligned}$$

Entsprechende Formeln gelten, wenn man die charakteristische Funktion (bei der Gesamtschadenverteilung und der Schadenhöhenverteilung) durch die momenterzeugende oder die erzeugende Funktion ersetzt. Im Fall der Poisson-Verteilung gilt mit $m(z) = e^{\lambda(z-1)}$ speziell $f(t) = e^{\lambda(g(t)-1)}$.

3.2.1 Summenverteilungen

Definition 3.2

Verteilungen der Form (3.2) heißen *Summenverteilungen*. Ist speziell $R = \pi(\lambda)$, so heißt dieser häufige Spezialfall *Poisson'sche Summenverteilung*. Man bezeichnet sie mit

$$\text{PSV}(\lambda, Q).$$

Beispiel 3.2

Sei $R = \text{NB}(1, 1-p)$ eine geometrische Verteilung, $Q = \text{Exp}(\theta)$. Dann gilt $\mathcal{P}\{S = 0\} = \mathcal{P}\{N = 0\} = 1-p$, und in diesem speziellen Fall kann P mit der Beziehung (3.3) explizit angegeben werden:

$$P = (1-p)\delta_0 + p\text{Exp}((1-p)\theta),$$

Mit der erzeugenden Funktion der Schadenzahlverteilung $m(z) = \frac{1-p}{1-pz}$ und der charakteristischen Funktion der Schadenhöhenverteilung $g(t) = \frac{\theta}{\theta-it}$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} f(t) &= m(g(t)) = \frac{1-p}{1-p\frac{\theta}{\theta-it}} \\ &= \frac{(1-p)(\theta-it)}{\theta-it-p\theta} \\ &= \frac{(1-p)(\theta-it-p\theta) + (1-p)p\theta}{\theta-it-p\theta} \\ &= 1-p + \frac{(1-p)p\theta}{\theta-it-p\theta} \\ &= 1-p + p\frac{(1-p)\theta}{(1-p)\theta-it} \end{aligned}$$

und dies ist die charakteristische Funktion von $(1-p)\delta_0 + p\text{Exp}((1-p)\theta)$ (weil $\frac{(1-p)\theta}{(1-p)\theta-it}$ die charakteristische Funktion von $\text{Exp}((1-p)\theta)$ ist).

Beispiel 3.3

Sei $R = b(n, p)$ und Q beliebig. Dann erhalten wir mit $m(z) = (1-p+pz)^n$

$$f(t) = m(g(t)) = (1-p+pg(t))^n.$$

$1-p+pg(t)$ ist die charakteristische Funktion von

$$\underbrace{(1-p)\delta_0 + pQ}_{=:H}$$

Wir haben hier ein homogenes Kollektiv mit gemeinsamer Schadenverteilung H und der Gesamtschadenverteilung

$$P = H^{*n}$$

Beispiel 3.4

Das Beispiel für $R = \text{NB}(1, p)$ und $Q = U(0, 1)$ ist in [12] auf S. 170 ausgeführt.

3.2.1.1 Faltungseigenschaften von Summenverteilungen

Satz 3.1

Seien P_1, P_2, \dots, P_n PSV's mit Parametern λ_i, Q_i . Dann ist auch

$$P = P_1 * \dots * P_n$$

eine PSV mit den Parametern

$$\begin{aligned} \lambda &= \sum \lambda_i \\ Q &= \frac{1}{\lambda} \sum \lambda_i Q_i \end{aligned}$$

Satz 3.2

Seien P_1, P_2, \dots, P_n Summenverteilungen mit SZV R_i und gemeinsamer SHV Q , so ist

$$P = P_1 * \dots * P_n$$

Summenverteilung mit

$$\text{SZV } R = R_1 * \dots * R_n$$

und

$$\text{SHV } Q$$

Beispiel 3.5

Satz 3.1 wird häufig dann zur Darstellung der PSV mit SHV Q verwandt, wenn der Träger von Q endlich ist.

- Sei δ_x das in x konzentrierte Wahrscheinlichkeitsmaß, d.h. $\delta_x\{x\} = 1$. Dann ist die PSV (λ, δ_x) eine skalierte Poissonverteilung $\pi(\lambda, x)$ mit

$$\pi(\lambda, x)\{kx\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Sei Q auf den Zahlen x_1, \dots, x_m konzentriert, d.h. $Q\{x_1, \dots, x_m\} = 1$. Dann gilt

$$\text{PSV}(\lambda, Q) = \pi(\lambda Q\{x_1\}, x_1) * \dots * \pi(\lambda Q\{x_m\}, x_m).$$

Diese Beziehung liefert einen Ansatz für die Berechnung bei kleinem m , die in Risikotheorie 2 unter dem Namen *sparse vector method* näher behandelt werden wird.

Summenverteilungen sind *nicht* eindeutig durch SZV und SHV festgelegt. Man kann jede Summenverteilung mit SZV NB(r, p) als PSV mit einer anderen SHV schreiben³

3.2.1.2 Naive Berechnung von Summenverteilungen

Um die Struktur von Summenverteilungen besser zu verstehen, werden hier einige Werte der Zähldichte einer Summenverteilung berechnet. Sei dazu angenommen, daß mit $h > 0$

$$Q\{h, 2h, 3h, \dots\} = 1$$

gilt. Das bedeutet, daß für die Summenverteilung P

$$P\{0, h, 2h, \dots\} = 1$$

³Ammeter-Transformation, siehe [12] auf den Seiten 23-25

gilt. Seien nun R die SZV. Dann berechnen sich die Zähldichten von P wie folgt:

$$\begin{aligned}
P\{0\} &= R\{0\} \\
P\{h\} &= \mathcal{P}\{N = 1 \wedge X_1 = h\} \\
&= R\{1\}Q\{h\} \\
P\{2h\} &= \mathcal{P}\{N = 1 \wedge X_1 = 2h\} + \mathcal{P}\{N = 2 \wedge X_1 + X_2 = 2h\} \\
&= R\{1\}Q\{2h\} + R\{2\}Q\{h\}^2 \\
P\{3h\} &= \mathcal{P}\{N = 1 \wedge X_1 = 3h\} + \mathcal{P}\{N = 2 \wedge X_1 + X_2 = 3h\} \\
&\quad + \mathcal{P}\{N = 3 \wedge X_1 + X_2 + X_3 = 3h\} \\
&= R\{1\}Q\{3h\} + R\{2\}\mathcal{P}\{X_1 = h \wedge X_2 = 2h\} \\
&\quad + R\{2\}\mathcal{P}\{X_1 = 2h \wedge X_2 = h\} + R\{3\}Q\{h\}^3 \\
&= R\{1\}Q\{3h\} + 2R\{2\}Q\{h\}Q\{2h\} + R\{3\}Q\{h\}^3 \\
&\vdots = \vdots
\end{aligned}$$

Dies wird für $4h, 5h, \dots$ immer aufwendiger. Für $4h$ hat man beispielsweise 5, für $5h$ 7 und für $6h$ bereits 11 Summanden. Erst Anfang der 80er-Jahre hat Harry Panjer einen effizienten Algorithmus für die Berechnung gewisser Summenverteilungen gefunden.

3.2.1.3 Rekursive Berechnung von Summenverteilungen

Hierfür wird angenommen, daß die SZV eine Zähldichte $p_n = \mathcal{P}\{N = n\}$ besitzt, die eine Rekursion folgender Form besitzt:

$$p_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) p_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Solche SZVen sind gerade die Poissonverteilung (mit $a = 0$), die Binomialverteilung (mit $a < 0$) und die Negativ-Binomialverteilung (mit $a > 0$). Falls zusätzlich Q auf Vielfachen von h lebt, wenn also

$$Q\{h, 2h, 3h, \dots\} = 1$$

gilt, dann ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten $P\{kh\}$ aus der *Panjer-Rekursion*

$$P\{0\} = R\{0\} \tag{3.4}$$

$$P\{(k+1)h\} = \sum_{j=1}^{k+1} \left(a + b \frac{j}{k+1}\right) Q\{jh\} P\{(k+1-j)h\}$$

oder spezieller für PSV's:

$$P\{0\} = R\{0\} \tag{3.5}$$

$$P\{(k+1)h\} = \frac{\lambda}{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} j Q\{jh\} P\{(k+1-j)h\}$$

Beweis 3.1

Wir skizzieren den Beweis der Rekursionsvorschrift 3.5 und nehmen dabei vereinfachend $h = 1$ an. Sei $m_0(z)$ die Erzeugende von Q und $m(z)$ die von P . Uns interessieren die Punktwahrscheinlichkeiten $P\{k\}$ (die Zähldichte) von P , also die Koeffizienten der Potenzreihe

$$m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{k\} z^k.$$

Aus der Fundamentalformel (3.3) leitet man ab, daß

$$m(z) = e^{\lambda(m_0(z)-1)}$$

und durch Logarithmieren und Ableiten nach z erhält man:

$$m'(z) = m(z)\lambda m_0'(z).$$

Die Gleichheit dieser beiden Potenzreihen — $m'(z)$ bzw. $m(z)\lambda m_0'(z)$ — bedeutet, daß die Koeffizienten dieser Potenzreihe übereinstimmen. $m(z)$ hat die Koeffizienten (bei z^k) $P\{k\}$, $m'(z)$ die Koeffizienten $(k+1)P\{k+1\}$. Die Koeffizienten der rechten Seite ergeben sich folgendermaßen:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

mit

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}. \quad (3.6)$$

Wenden wir 3.6 mit $b_k = \lambda P\{k\}$ und $a_k = (k+1)Q\{k+1\}$ an, so erhalten wir als Koeffizienten c_k von z^k auf der rechten Seite

$$\lambda \sum_{j=0}^k (j+1)Q\{j+1\}P\{k-j\}.$$

Gleichheit der Koeffizienten links und rechts bedeutet nun

$$\begin{aligned} (k+1)P\{k+1\} &= \lambda \sum_{j=0}^k (j+1)Q\{j+1\}P\{k-j\} \\ &= \lambda \sum_{j=1}^{k+1} jQ\{j\}P\{k+1-j\}. \end{aligned}$$

Durch diese Rekursion werden die $P\{kh\}$ festgelegt. Die ersten Werte lauten

$$\begin{aligned} P\{h\} &= \lambda Q\{h\}P\{0\} \\ P\{2h\} &= \frac{\lambda}{2}(Q\{h\}P\{h\} + 2Q\{2h\}P\{0\}) \\ &\vdots = \ddots \end{aligned}$$

Sind $P\{kh\}$ für $k = 0, \dots, K$ zu berechnen und ist $Q\{jh\} = 0$ für $j > J$, so sind höchstens $J \cdot K$ Multiplikationen zu berechnen. Der Rechenaufwand steigt linear in J , der Zahl der Punkte im Träger von Q . Für $J \leq 1000$ geht dies mit vertretbarer Rechenzeit.

3.3 PSV-Approximation

Summenverteilungen, insbesondere PSV's, sind als kollektive Modelle Approximationen des individuellen Modells. Letzteres wird trotz aller Unzulänglichkeiten⁴ als das wahre Modell aufgefaßt. Im individuellen Modell werden nicht nur Schadendaten, sondern auch Bestandsdaten berücksichtigt (s. Abschnitt 3.1), im kollektiven Modell wird von den Unterschieden zwischen den Verträgen abgesehen. Der Bestand wird als „Black Box“ aufgefaßt, die ohne Bezug zum einzelnen Vertrag Schäden produziert. Die Approximation des individuellen Modells durch eine PSV gilt folgendermaßen:

Satz 3.3

Seien $P_i = (1 - p_i)\delta_0 + p_iQ_i$, $i = 1, \dots, n$ und \tilde{P} die PSV mit

$$\lambda = \sum_{i=1}^n p_i$$

$$Q = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n p_i Q_i$$

Ist $P = P_1 * \dots * P_n$, so gilt für beliebiges Ereignis $A \in \mathcal{B}$

$$|P(A) - \tilde{P}(A)| \leq \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

Beispiel 3.6

Im Bestand aus Beispiel 3.1 gilt $n = 100$. Ist q_i die Sterbewahrscheinlichkeit des i -ten Vertrages und s_i dessen Risikosumme, dann ist in obiger Notation

$$p_i = q_i \quad \text{und} \quad Q_i\{s_i\} = 1$$

zu setzen. λ berechnet sich als $\sum q_i$ zu $\lambda = 0.06817$ aus

$$0.000505 * 10 + 0.000525 * 10 + 0.000552 * 10 + 0.000587 * 10 + 0.000630 * 10$$

$$+ 0.000680 * 10 + 0.000738 * 10 + 0.000805 * 10 + 0.000881 * 10 + 0.000914 * 10.$$

Q hat Masse auf den Punkten 1000, 2000, \dots , 5000, und zwar

$$Q\{1000\} = 0.133695, \quad Q\{2000\} = 0.169737, \quad Q\{3000\} = 0.144433$$

⁴wie z.Bsp. der Unabhängigkeit der Risiken oder der Nichtberücksichtigung von Kumulschäden

$$Q\{4000\} = 0.298929, \quad Q\{5000\} = 0.253205$$

Ferner erhalten wir

$$\sum p_i^2 = 0.0000484345.$$

Bem.: Für die so definierte PSV-Approximation \tilde{P} für P gilt:

$$\mathcal{E}(\tilde{P}) = \mathcal{E}(P) \quad \text{und} \quad \text{Var}(\tilde{P}) \geq \text{Var}(P).$$

Die Approximation \tilde{P} bleibt also bezüglich der Risikobewertung vorsichtig, d.h. auf der „sicheren“ Seite. Um $\mathcal{E}(\tilde{P})$ bzw. $\text{Var}(\tilde{P})$ zu berechnen, benötigen wir ein geeignetes Modell, um die entsprechenden Parameter von Q zu berechnen. Sei $Q = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i Q_i$ mit Verteilungen Q_i und $\alpha_i \geq 0$ derart, daß die Summe $\sum_i \alpha_i = 1$ ist. Wir konstruieren eine Zufallsvariable X mit Verteilung Q : Seien N, X_1, X_2, \dots stochastisch unabhängig mit $X_i \sim Q_i$ und $\mathcal{P}\{N = k\} = \alpha_k$. Dann gilt wegen

$$\mathcal{P}\{X \in A\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}\{N = k \wedge X_k \in A\} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k Q_k(A).$$

$$X = X_N \sim Q.$$

Somit wird

$$\mathcal{E}Q = \mathcal{E}X_N = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}\{N = k\} \mathcal{E}X_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathcal{E}(Q_k)$$

und

$$\begin{aligned} \text{Var}(Q) &= \mathcal{E}(X_N - \mathcal{E}X_N)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}\{N = k\} \mathcal{E}(X_k - \mathcal{E}X_N)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (\text{Var}(Q_k) + (\mathcal{E}(Q_k) - \mathcal{E}(Q))^2). \end{aligned}$$

Für die PSV-Approximation \tilde{P} gilt insbesondere

$$\mathcal{E}(\tilde{P}) = \lambda \mathcal{E}(Q) = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n p_i \mathcal{E}(Q_i) = \mathcal{E}(P)$$

und

$$\text{Var}(\tilde{P}) = \lambda \mu_2(Q) = \sum_{i=1}^n p_i \mu_2(Q_i) \geq \sum_{i=1}^n p_i \text{Var}(Q_i) = \text{Var}(P).$$

Beispiel 3.7

(Fortsetzung von Beispiel 3.1 auf Seite 35) Wenn wir für das Beispiel 3.1 zur Panjer-Rekursion die ersten 25 Punktwahrscheinlichkeiten $\tilde{P}\{1000k\}$, $k = 0, \dots, 24$ berechnen, erhalten wir

$k + 1$	$\tilde{P}\{1000k\}$	$k + 1$	$\tilde{P}\{1000k\}$
1	0.934101662796	14	0.0000048308674705
2	0.00851340255472	15	0.0000029535674578
3	0.01084728591565	16	$9.1115429573 \cdot 10^{-7}$
4	0.0092957914381	17	$8.7899680622 \cdot 10^{-8}$
5	0.01918192833902	18	$6.1376743203 \cdot 10^{-8}$
6	0.01640438858156	19	$3.8177024738 \cdot 10^{-8}$
7	0.00041448834116	20	$1.7554860798 \cdot 10^{-8}$
8	0.00037769962389	21	$4.4329242104 \cdot 10^{-9}$
9	0.00035792723678	22	$6.7445010689 \cdot 10^{-10}$
10	0.00033521076417	23	$4.1073975506 \cdot 10^{-10}$
11	0.00014720612847	24	$2.1200396762 \cdot 10^{-10}$
12	0.000007839182446	25	$7.9490342926 \cdot 10^{-11}$
13	0.0000062626897542		

Es bleibt festzustellen, daß die Approximationsgenauigkeit deutlich besser ist als die theoretische Schranke 0,00004843.

3.3.1 Beweis des Satzes über die PSV-Approximation

Im Beweis verwenden wir die folgende

Definition 3.3

Die *Distanz* zwischen zwei Verteilungen P_1 und P_2 sei definiert als

$$d(P_1, P_2) := \sup \{|P_1(A) - P_2(A)| : A \in \mathcal{B}\}.$$

Wir wollen beweisen, daß (in der eben definierten Schreibweise)

$$d(\tilde{P}, P) \leq \sum_{i=1}^n p_i^2$$

gilt. Dabei benutzen wir die Relation

$$d(P_1 * \dots * P_n, \tilde{P}_1 * \dots * \tilde{P}_n) \leq \sum_{i=1}^n d(P_i, \tilde{P}_i),$$

die hier nicht bewiesen werden soll. P ist per definitionem eine Faltung, und \tilde{P} ist (s. Satz 3.1) die Faltung der n PSV's

$$\tilde{P}_i = \text{PSV}(p_i, Q_i).$$

Es reicht somit zu zeigen, daß

$$d(P_i, \tilde{P}_i) \leq p_i^2$$

gilt. Wir betrachten dazu zunächst $P_i(A) - \tilde{P}_i(A)$. Aus den jeweiligen Darstellungen für P_i und \tilde{P}_i erhalten wir

$$\begin{aligned} P_i(A) - \tilde{P}_i(A) &= (1 - p_i)\delta_0(A) - e^{-p_i}\delta_0(A) + p_iQ_i(A) - p_ie^{-p_i}Q_i(A) \\ &\quad - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(p_i)^k}{k!} e^{-p_i}Q_i^{*k}(A) \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} I_1 &= (1 - p_i - e^{-p_i})\delta_0(A), \\ I_2 &= (p_i - p_ie^{-p_i})Q_i(A), \\ I_3 &= - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(p_i)^k}{k!} e^{-p_i}Q_i^{*k}(A). \end{aligned}$$

Es gilt für $p > 0$

$$1 - p - e^{-p} \leq 0,$$

Für $p \geq 1$ ist die Aussage trivial, und für $0 < p < 1$ ist wegen

$$1 + p + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{6}p^3 + \dots \leq 1 + p + p^2 + p^3 + \dots$$

die Beziehung

$$e^p \leq \frac{1}{1-p}$$

wahr, d.h.

$$1 - p \leq e^{-p}. \tag{3.7}$$

Daher ist $I_1 \leq 0$. Ferner ergibt (3.7) die Abschätzung

$$I_2 \leq p_i(1 - e^{-p_i}) \leq p_i^2.$$

Mit $I_3 \leq 0$ folgt schließlich

$$P_i(A) - \tilde{P}_i(A) \leq p_i^2.$$

Wir betrachten nun $\tilde{P}_i(A) - P_i(A)$. Sei $\bar{A} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$ das Komplement von A . Wegen $P_i(\bar{A}) = 1 - P_i(A)$ und $\tilde{P}_i(\bar{A}) = 1 - \tilde{P}_i(A)$ erhalten wir

$$\tilde{P}_i(A) - P_i(A) = 1 - \tilde{P}_i(\bar{A}) - (1 - P_i(\bar{A})) = P_i(\bar{A}) - \tilde{P}_i(\bar{A}) \leq p_i^2,$$

was

$$d(P_i, \tilde{P}_i) \leq p_i^2$$

beweist.

3.4 Normalapproximation für Poisson-sche Summenverteilungen

Die PSV mit Parametern λ und Q kann für großes λ durch die Normalverteilung mit Mittelwert $\lambda\mu_1(Q)$ und Varianz $\lambda\mu_2(Q)$ approximiert werden. Dies ergibt sich wie im Beispiel (2.15) aus der Beziehung

$$PSV(\lambda, Q) = PSV(\lambda/n, Q)^{*n}.$$

Als Abschätzung erhält man wie dort für alle $t \in \mathbb{R}$

$$|PSV(\lambda, Q)(-\infty, t) - N(\lambda\mu_1(Q), \lambda\mu_2(Q))(-\infty, t)| \leq c\lambda^{-1/2}\beta_3(Q).$$

wobei mit $X \sim Q$

$$\beta_3(Q) = \mathcal{E}|X|^3 / \mu_2(Q)^{3/2}.$$

gesetzt ist. In Anwendungen ist man vor allem an Wahrscheinlichkeiten der Form $PSV(\lambda, Q)(t, \infty)$, sogenannten Tailwahrscheinlichkeiten, interessiert. Für solche Wahrscheinlichkeiten ist die Normalapproximation wenig hilfreich, sie hat einen *absoluten* Fehler der Größe $c\lambda^{-1/2}\beta_3(Q)$. Man benötigt stattdessen eine Approximation, bei der der *relative* Fehler klein wird. Wir wollen im folgenden $PSV(\lambda, Q)(t, \infty)$ für große t approximieren, so daß mit der Approximation $A(\lambda, Q, t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} PSV(\lambda, Q)(t, \infty) / A(\lambda, Q, t) = 1.$$

Tailwahrscheinlichkeiten werden wesentlich durch die möglichen Großschäden im Gesamtbestand beeinflusst. Besonders interessant sind demnach Approximationen (im eben erwähnten Sinn) für den Fall, daß Q eine Verteilung ist, mit der Großschäden modelliert werden.

3.5 Summenverteilungen mit Großschäden

Mit welchen Verteilungen kann man Großschäden modellieren? In der Praxis spricht man von Großschadenbeständen, wenn die Summe eines kleinen Teils der beobachteten Schäden einen großen Anteil in der Summe aller Schäden ausmacht. Sind x_1, \dots, x_n die beobachteten Schäden und $x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \dots \geq x_{(n)}$ die nach ihrer Größe geordneten Schäden, so spricht man beispielsweise von einem Großschadenbestand, wenn für ein $m \leq 0.2n$

$$\sum_{i=1}^m x_{(i)} \geq \sum_{i=1}^n x_i,$$

also wenn 20% aller Schäden mindestens 80% des Gesamtschadens ausmachen.

Ein speziell für Tailwahrscheinlichkeiten zugeschnittenes theoretisches Konzept von Großschadenverteilungen beruht ebenfalls auf der Gegenüberstellung der größten Schäden und des Gesamtschadens. Dies ist das Konzept *subexponentieller* Verteilungen. Wie immer betrachten wir nur Schadenhöhenverteilungen Q mit $Q(0, \infty) = 1$.

Definition 3.4

Eine Schadenhöhenverteilung Q heißt subexponentiell, wenn für alle $t > 0$ die Beziehung $Q(t, \infty) > 0$ gilt und wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q^{*2}(t, \infty)/Q(t, \infty) = 2.$$

Bevor wir die in der Definition gestellte Bedingung diskutieren können, müssen wir wesentliche, teilweise tiefliegende Eigenschaften subexponentieller Verteilungen notieren. Ein Beweis dieser Eigenschaften ist in unserem Rahmen nicht möglich.

Satz 3.4

Sei Q eine Verteilung mit $Q(t, \infty) > 0, t > 0$. Dann gilt:

a) Q ist subexponentiell genau dann, wenn für alle $n = 2, 3, \dots$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q^{*n}(t, \infty)/Q(t, \infty) = n.$$

b) Ist Q subexponentiell, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl s so daß für alle $t > s$

$$Q^{*n}(t, \infty) \leq Q(t, \infty)(1 + \varepsilon)^n.$$

Bemerkungen Sei Q eine beliebige Schadenhöhenverteilung und seien X_1, \dots, X_n stochastisch unabhängig mit Verteilung Q .

i) Zunächst gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}\{\max(X_1, \dots, X_n) > t\}/(nQ(t, \infty)) = 1.$$

Denn

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\{\max(X_1, \dots, X_n) > t\} &= 1 - \mathcal{P}\{\max(X_1, \dots, X_n) \leq t\} = \\ 1 - \mathcal{P}\{X_i \leq t, 1 \leq i \leq n\} &= 1 - Q[0, t]^n = 1 - (1 - Q(t, \infty))^n = \\ \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} Q(t, \infty)^k. \end{aligned}$$

Division durch $Q(t, \infty)$ liefert mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t, \infty) = 0$$

die obige Behauptung.

ii) Wegen

$$\max(X_1, \dots, X_n) \leq \sum_{i=1}^n X_i$$

gilt für alle t :

$$\mathcal{P}\{\max(X_1, \dots, X_n) > t\} / \mathcal{P}\{\sum_{i=1}^n X_i > t\} \leq 1.$$

- iii) Eine subexponentielle Verteilung zeichnet sich nun dadurch aus, daß der maximal mögliche Wert 1 für alle n und für $t \rightarrow \infty$ angenommen wird:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}\{\max(X_1, \dots, X_n) > t\} / \mathcal{P}\{\sum_1^n X_i > t\} = 1.$$

Es ist nämlich

$$\frac{\mathcal{P}\{\max(X_1, \dots, X_n) > t\}}{\mathcal{P}\{\sum_1^n X_i > t\}} = \frac{\mathcal{P}\{\max(X_1, \dots, X_n) > t\} nQ(t, \infty)}{nQ(t, \infty) Q^{*n}(t, \infty)}.$$

Der erste Term auf der rechten Seite konvergiert gegen 1 nach i), der zweite ebenfalls, weil Q subexponentiell ist und wegen Teil a) des Satzes.

- iv) Man kann demnach Subexponentialität einer Schadenhöhenverteilung folgendermaßen charakterisieren: Bei identisch und subexponentiell verteilten stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n verhält sich die Tailwahrscheinlichkeit des Maximums $\max(X_1, \dots, X_n)$ wie die Tailwahrscheinlichkeit der Summe $\sum_1^n X_i$.

Um die Schreibweise im folgenden zu vereinfachen, benutzen wir die Schreibweise

$$a(t) \sim b(t)$$

als Abkürzung für den Sachverhalt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t)/b(t) = 1.$$

Die Aussage $a(t) \sim b(t)$ besagt gerade, daß $b(t)$ eine Approximation für $a(t)$ ist, deren relativer Fehler

$$\frac{a(t) - b(t)}{b(t)}$$

für $t \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Dieses Konzept ist besonders von Interesse im Falle $a(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.

Die Approximation der Tailwahrscheinlichkeiten einer Summenverteilung liefert nun folgender

Satz 3.5

Ist Q subexponentiell und R eine Schadenzahlverteilung derart, daß für eine positive Zahl ε

$$\sum_{k=0}^{\infty} R\{k\}(1 + \varepsilon)^k < \infty,$$

so gilt für die Summenverteilung

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} R\{k\}Q^{*k}$$

die Beziehung

$$P(t, \infty) \sim \mu_1(R)Q(t, \infty).$$

Hierbei ist $\mu_1(R)$ das erste Moment von R .

Somit ist $\mu_1(R)Q(t, \infty)$ eine Approximation der Tailwahrscheinlichkeit von P , deren relativer Fehler gegen Null konvergiert.

Beweis 3.2

Wir wählen s passend zum vorgegebenen positiven ε so daß für alle $t > s$ die Beziehung

$$Q^{*k}(t, \infty) \leq (1 + \varepsilon)^k Q(t, \infty)$$

gilt. Für festgehaltenes ganzzahliges m ist dann

$$P(t, \infty)/Q(t, \infty) = \sum_{k=1}^m R\{k\} \frac{Q^{*k}(t, \infty)}{Q(t, \infty)} + \sum_{k=m+1}^{\infty} R\{k\} \frac{Q^{*k}(t, \infty)}{Q(t, \infty)}.$$

Der erste Term der rechten Seite konvergiert für $t \rightarrow \infty$ gegen

$$\sum_{k=1}^m kR\{k\},$$

der zweite Term ist für alle $t > s$ kleiner als

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} R\{k\}(1 + \varepsilon)^k.$$

Mit $m \rightarrow \infty$ ergibt sich die Behauptung.

Für folgendes Beispiel nehmen wir vorweg, daß die Paretoverteilungen subexponentiell sind.

Beispiel 3.8

Ist Q die Paretoverteilung $Par^*(a, 1)$, dann gilt für die Gesamtschadenverteilung $P = PSV(\lambda, Q)$ die Beziehung

$$P(t, \infty) \sim \lambda t^{-a}.$$

Wir wollen nun Bedingungen angeben, mit denen wir die Subexponentialität von Verteilungen nachprüfen können. Dabei werden wir zwei neue Begriffe definieren, den der *Großschadenfunktion* und der *Großschadenintensität*. Beide Begriffe kommen auch in der Lebensversicherungsmathematik vor, sie heißen dort, angewandt auf Lebensdauervertelungen Q , die *mittlere Restlebensdauer* und *Sterbeintensität*.

Definition 3.5

a) Die Funktion

$$x \rightarrow \mathcal{E}(X - x)1_{(X \geq x)}/\mathcal{P}\{X \geq x\}$$

heißt *Großschadenfunktion* der Zufallsvariable X . Ist $X \sim Q$, so sprechen wir auch von der *Großschadenfunktion* von Q .

b) Für Verteilungen Q mit Dichte $f(x)$ heißt

$$r(x) = f(x)/Q(x, \infty)$$

die Großschadenintensität von Q . Ist $Q(x, \infty) = 0$, so setzt man $r(x) = 0$.

Bemerkungen:

- Die Großschadenfunktion wird nicht zur Charakterisierung der Subexponentialität benutzt. Sie dient als Entscheidungskriterium, ob vorliegende Schadendaten eine Großschadenmodellierung erfordern oder nicht. Hierfür berechnet man die Großschadenfunktion für die empirische Verteilung der Daten: sind x_1, \dots, x_n die Schadendaten und

$$x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \dots \geq x_{(n)}$$

die nach ihrer Größe geordneten Schadendaten, so ist die zugehörige Großschadenfunktion definiert als

$$x \rightarrow \frac{1}{m(x)} \sum_1^{m(x)} x_{(i)} - x,$$

wobei $m(x)$ die Anzahl der Schäden größer als x ist. Diese Funktion vergleicht man mit den Großschadenfunktionen von Gammaverteilungen und von Pareto- und anderen Großschadenverteilungen.

Hier sind Großschadenfunktionen gezeigt für folgende Verteilungen: (1) Exponentialverteilung mit Parameter 1; (2) Gammaverteilung mit Parametern (1,3); (3) Gammaverteilung mit Parametern (1,0.5); (4) Weibullverteilung mit Parametern (1,2); (5) Weibullverteilung mit Parametern (1,0.7); (6) Lognormalverteilung mit Parametern (-0.2,1); (7) Paretoverteilung mit Parametern (1,1.5).

- Die Großschadenintensität charakterisiert die zugehörige Verteilung Q : Q hat Tailwahrscheinlichkeiten

$$Q(t, \infty) = \exp\left(-\int_0^t r(x)dx\right).$$

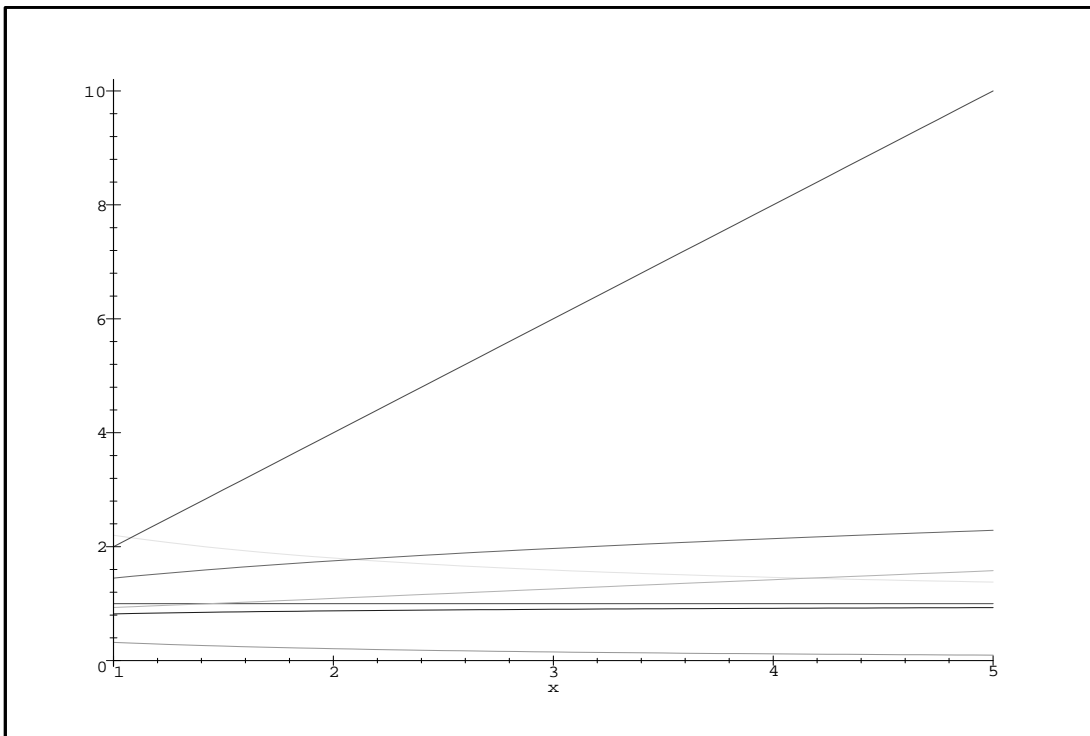
Dies ergibt sich, wenn man die rechte Seite logarithmiert und ableitet, mit der Beziehung

$$-r(x) = \frac{d}{dx} \log Q(x, \infty).$$

- Jede Funktion $r(x) \geq 0$, die

$$\int_0^\infty r(x)dx = \infty$$

erfüllt, definiert über die Beziehung (3.5) eine Schadenhöhenverteilung.



Subexponentielle Verteilungen können wir nun mit dem Verhalten der Großschadenintensität identifizieren.

Satz 3.6 (Klüppelberg)

- i) Ist die Dichte $f(x)$ von Q schließlich monoton fallend (d.h. $f(x)$ ist auf einem Halbstrahl (M, ∞) monoton fallend), und gilt

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} xr(x) < \infty,$$

dann ist Q subexponentiell.

- ii) Ist die Großschadenintensität $r(x)$ von Q schließlich monoton fallend und gilt

$$\int \exp(xr(x))Q(x, \infty)dx < \infty,$$

dann ist Q subexponentiell.

- iii) Gilt für die Großschadenintensität $r(x)$ von Q

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} xr(x) = \infty, \text{ und}$$

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} xr(x)/(-\log Q(x, \infty)) < 1,$$

dann ist Q subexponentiell.

Beispiel 3.9

- a) Für die Paretoverteilung $Par^*(a, 1)$ gilt $r(x) = a/x, x \geq 1$. Somit ist diese Verteilung subexponentiell nach Teil i) des Satzes. Es ist leicht, diese Eigenschaft für alle anderen Paretoverteilungen nachzuweisen. Allgemeinere Loggammaverteilungen werden wir später behandeln.
- b) Sei Q eine Weibullverteilung mit Parameter $\beta < 1$, also mit Dichte

$$\alpha\beta x^{\beta-1} \exp(-\alpha x^\beta), x > 0$$

und Tailwahrscheinlichkeiten

$$Q(x, \infty) = \exp(-\alpha x^\beta), x > 0.$$

Dann ist $r(x) = \alpha\beta x^{\beta-1}$, und somit gilt $\lim r(x) = 0, \lim xr(x) = \infty$, und

$$\lim xr(x)/(-\log(Q(x, \infty))) = \lim \alpha\beta x^\beta/(\alpha x^\beta) = \beta < 1.$$

Dann ist Q subexponentiell nach Teil iii) des Satzes.

- Sei Q eine Lognormalverteilung mit Parametern μ und σ^2 , also mit Dichte

$$(2\pi\sigma^2)^{-1/2} x^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\log x - \mu)^2\right)$$

und Tailwahrscheinlichkeit

$$1 - \Phi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right).$$

Wir werden später sehen, daß

$$Q(t, \infty) \sim \frac{\sigma}{\log t - \mu} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\log t - \mu)^2\right).$$

Also gilt für die Großschadenintensität $r(x)$

$$r(x) \sim \frac{\log x - \mu}{\sigma^2} \frac{1}{x}$$

Daraus folgt $\lim r(x) = 0, \lim xr(x) = \infty$, was die Anwendung von Teil iii) des Satzes plausibel macht. In der Tat ist dieser anwendbar wegen

$$-\log Q(x, \infty) \sim \frac{1}{2\sigma^2}(\log x - \mu)^2$$

und

$$xr(x) \sim \frac{1}{\sigma^2}(\log x - \mu).$$

Es gilt dann nämlich

$$\lim xr(x)/(-\log Q(x, \infty)) = 0.$$

3.6 Approximationen von Tailwahrscheinlichkeiten

Wenn wir die Tailwahrscheinlichkeiten einer Summenverteilung mit Schadenszahlverteilung R und subexponentieller Schadenhöhenverteilung Q durch $\mu_1(R)Q(t, \infty)$ approximieren wollen, müssen wir $Q(t, \infty)$ entweder berechnen oder geeignet approximieren können. Wie wir vorhin gesehen haben, sind Approximationen für $Q(t, \infty)$ auch für das asymptotische Verhalten von $r(x)$ wichtig.

Satz 3.7

Sei Q eine Verteilung mit Dichte $f(t)$, und $g(t)$ eine meßbare Funktion mit $f(t) \sim g(t)$. Dann gilt

$$Q(t, \infty) \sim \int_t^\infty g(x) dx.$$

Beweis 3.3

Die Eigenschaft $f(t) \sim g(t)$ besagt präzise, daß für alle $\varepsilon > 0$ ein $M > 0$ existiert so daß für alle $t > M$

$$-\varepsilon < \frac{g(t)}{f(t)} - 1 < \varepsilon \text{ oder} \\ f(t)(1 - \varepsilon) < g(t) < f(t)(1 + \varepsilon).$$

Integration ergibt für $t > M$

$$Q(t, \infty)(1 - \varepsilon) < \int_t^\infty g(x) dx < Q(t, \infty)(1 + \varepsilon),$$

was behauptet war.

Beispiel 3.10

a) Sei Q die Standardnormalverteilung $N(0, 1)$. Dann gilt für ihre Dichte

$$(2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2) \sim (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Wegen

$$\int_t^\infty \exp(-x^2/2) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{t} \exp(-t^2/2)$$

gilt nach unserem Satz

$$Q(t, \infty) \sim \frac{1}{t} (2\pi)^{-1/2} \exp(-t^2/2).$$

b) Sei Q eine Loggammaverteilung mit Dichte

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\beta+1)} (\log x)^{\alpha-1}, x > 1.$$

Setze

$$g(x) = \frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x^\beta (\log x)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{\alpha-1}{\beta \log x}\right).$$

Dann ist $f(x) \sim g(x)$, und

$$\int_t^\infty g(x) dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{-\beta} (\log t)^{\alpha-1}.$$

Also erhalten wir die Beziehung

$$Q(t, \infty) \sim \frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} t^{-\beta} (\log t)^{\alpha-1}.$$

Kapitel 4

Ruintheorie

4.1 Diskrete Ruinwahrscheinlichkeit

Kontrolle des Risikos im Versicherungsbestand heißt

- Modellbildung (individuelles / kollektives Modell)
- Modellidentifikation (Festlegung von Verteilungsfunktionen P_i für Vertrag i im individuellen Modell; Festlegung von SZV R und SHV Q im kollektiven Modell)
- Berechnung von kritischen Wahrscheinlichkeiten (Ruinwahrscheinlichkeiten und zugehörige Größen)
- Beeinflussung dieser Resultate durch Risk-Management-Maßnahmen

Betrachten wir zunächst nur eine Periode. Sei also X der Gesamtschaden, π die Bestandsprämie und s die freie Reserve. Dann bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit

$$\mathcal{P}\{X > \pi + s\}$$

als (*einjährige*) *Ruinwahrscheinlichkeit*. Dabei ist der Ausgleich in der Zeit¹ nicht berücksichtigt.

Betrachten wir nun mehrere Perioden. Die Bestandsprämie sei konstant über die Zeit und habe die Höhe π . X_t sei der Schadenaufwand der t -ten Periode. Der Zufallsvektor K modelliert das Kapital des Versicherers zu festen Zeitpunkten $0, \dots, T$. Es ist also

$$K(t) = \begin{cases} s & , t = 0 \\ K(t-1) + \pi - X_t & , 0 < t \leq T \end{cases} .$$

Die Tatsache, daß das Kapital zum Ende des i -ten Jahres auf das Jahr $i+1$ „übergeben“ wird, bezeichnet man als *Fortschreibungs-Ansatz*. Für die Praxis ist dieser Fortschreibungsansatz

¹Beim Ausgleich im Kollektiv wurde über eine Vielzahl von Verträgen ausgeglichen. Beim Ausgleich in der Zeit geschieht prinzipiell das gleiche, nur über viele (Zeit-)Perioden anstatt über eine Vielzahl von Verträgen.

mit Problemen verbunden: Überschüsse eines Jahres müssen in der Regel als Gewinn ausgewiesen und dann versteuert und - zum Teil als Dividende, zum Teil als Überschußbeteiligung - ausgeschüttet werden. Wir folgen hier der klassischen Theorie, die diese Probleme ignoriert.

Die Rekursionsvorschrift läßt sich auflösen zu

$$K(t) = s + t\pi - \sum_{r=1}^t X_r \quad t = 1, \dots, T$$

Wir sind nun in der Lage, die *T-Perioden-Ruinwahrscheinlichkeit* ψ_T zu definieren:

$$\begin{aligned} \psi_T(s) &= \mathcal{P}\{K(t) < 0 \text{ für ein } t \text{ aus } \{1, \dots, T\}\} \\ &= \mathcal{P}\left\{s + t\pi - \sum_{r=1}^t X_r < 0 \text{ für ein } t \text{ aus } \{1, \dots, T\}\right\} \end{aligned}$$

Der Fortschreibungsansatz erlaubt gegenüber seinem bisherigen Grundmodell zahlreiche verbesserte Modelle. Beispielsweise kann man die Verzinsung durch Berücksichtigung des Zinssatzes i_t (Zinssatz während der Periode t) in das Modell einfließen lassen. Wir erhalten

$$K(t) = \begin{cases} s & , t = 0 \\ (K(t-1) + \pi)(1 + \frac{i_t}{100}) - X_t, & 0 < t \leq T \end{cases}$$

oder explizit

$$\begin{aligned} K(t) &= s \prod_{r=1}^t (1 + \frac{i_r}{100}) && \text{(verzinst Reserve)} \\ &+ \sum_{r=1}^t \pi \prod_{j=r}^t (1 + \frac{i_j}{100}) && \text{(verzinst Prämien)} \\ &- \sum_{r=1}^t X_r \prod_{j=r+1}^t (1 + \frac{i_j}{100}) && \text{(verzinst Schäden)} \end{aligned}$$

Hierbei nehmen wir an (als Konvention), daß Prämien am Anfang einer Versicherungsperiode, Schäden an deren Ende bezahlt werden.

Weiter gibt es die Möglichkeit, die Restriktion der Konstanz der Prämie über die Zeit fallen zu lassen. Wir schreiben sodann π_t für die Prämie der Periode t .

Diese erweiterten Modelle haben jedoch einen gravierenden Nachteil: Einfache Berechnungsansätze (insbesondere das Konzept des Anpassungskoeffizienten (s. Abschnitt 4.2)) werden zunichte gemacht, weswegen wir uns im folgenden auf das oben erwähnte Grundmodell beschränken wollen.

Wir machen sogar noch eine weitere Einschränkung. Die Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit bei endlichem Planungshorizont ($T < \infty$) ist sehr aufwendig. Da $\psi_T(s)$ mit zunehmender Plandauer gegen $\psi(s)$ konvergiert, ist es vernünftig, $\psi_T(s)$ durch $\psi(s) := \psi_\infty(s)$ nach oben abzuschätzen:

$$\psi_T(s) \leq \psi(s) = \mathcal{P}\{K(t) < 0 \text{ für ein } t \geq 1\}.$$

Im folgenden werden wir generell annehmen, daß X_1, X_2, \dots (evtl. nach Inflationsbereinigung) stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind.

Dann gilt der

Satz 4.1

(Satz über den Sicherheitszuschlag): Ist $0 < \text{Var}(X_1) < \infty$ und $\mathcal{E}X_1 \geq \pi$, dann gilt für alle $s \geq 0$:

$$\psi(s) = 1$$

Beweis 4.1

- Im Fall $\mathcal{E}X_1 > \pi$ ist die Aussage intuitiv klar. Sie ergibt sich zudem aus dem starken Gesetz der großen Zahlen (s. Abschnitt 8).
- Im Fall $\mathcal{E}X_1 = \pi$ ist $\sum_{i=1}^n (X_i - \pi)$ eine Folge von Partialsummen unabhängiger, zentrierter, identisch verteilter Zufallsvariablen, die nicht beschränkt bleibt:

$$\forall M : \mathcal{P}\{\forall n : \sum_{i=1}^n (X_i - \pi) \leq M\} = 0$$

Dies folgt aus dem Satz über den iterierten Logarithmus (Satz 2.7). Für $M = s$ ergibt sich

$$1 - \psi(s) = \mathcal{P}\{\forall t \geq 0 : s - \sum_{i=1}^t (X_i - \pi) \geq 0\} = \mathcal{P}\{\forall t : \sum_{i=1}^t (X_i - \pi) \leq s\} = 0,$$

woraus sofort $\psi(s) = 1$ folgt.

Wir bezeichnen die Größe

$$\pi - \mathcal{E}X_1$$

als *Sicherheitszuschlag* und

$$\theta := \frac{\pi - \mathcal{E}X_1}{\mathcal{E}X_1}$$

als *relativen Sicherheitszuschlag*, wobei wir im folgenden immer annehmen wollen, daß $\theta > 0$ ist.

4.2 Anpassungskoeffizient und Cramer-Lundberg-Ungleichung

Sei $Z_i := X_i - \pi$ der Überschuß der Schäden des i -ten Jahres über die Prämie für diesen Zeitraum, also der Verlust des Versicherers bezogen auf das i -te Jahr. Die Zufallsvariablen Z_1, Z_2, \dots sind stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit $\mathcal{E}Z_1 < 0$. Für eine Zufallsvariable Z mit $\mathcal{E}Z < 0$ ist der *Anpassungskoeffizient* R die positive Lösung der Gleichung

$$\mathcal{E}e^{rZ} = 1, \tag{4.1}$$

speziell für $Z = X - \pi$ ergibt sich R aus der Gleichung

$$\mathcal{E}e^{rX} = e^{r\pi}. \quad (4.2)$$

Die Gleichungen (4.1) bzw. (4.2) haben die Lösung $r = 0$ und höchstens eine positive Lösung.

Die Funktion verläuft in der Regel wie die obere Kurve der Zeichnung: Sie startet bei Null in 1, taucht unter die Gerade $r \equiv 1$ und steigt schließlich unbeschränkt. Die untere Kurve zeigt ein manchmal vorkommendes anderes Verhalten: Bis zum Punkt R bleibt die Kurve unterhalb $r \equiv 1$, dann springt sie auf den Wert $+\infty$. In diesem Fall existiert der Anpassungskoeffizient nicht. Das Verhalten der Kurve $r \rightarrow \mathcal{E}e^{rZ}$ wird im folgenden untersucht.

Sei $r_0 = \sup\{r : \mathcal{E}e^{rZ} < \infty\}$. Dann ist $f(r) = \mathcal{E}e^{rZ}$ auf $[0, r_0)$ definiert, dort beliebig oft differenzierbar² mit

$$\begin{aligned} f'(r) &= \mathcal{E}Z e^{rZ} \\ f''(r) &= \mathcal{E}Z^2 e^{rZ}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} f'(0) &= \mathcal{E}Z < 0 \\ f''(r) &\geq 0 \text{ für } r \geq 0. \end{aligned}$$

Die erste Eigenschaft präzisiert das Verhalten der Kurve in Null, die zweite legt die Form der Kurve fest. Das Verhalten von $f(r)$ für große r (bzw. für r nahe r_0) legt nun fest, ob der Anpassungskoeffizient existiert:

Fall $r_0 = \infty$: Wir nehmen an, daß

$$\mathcal{P}\{X > \pi\} > 0,$$

da sonst ein Geschäft ohne Risiko („Piraterie“) vorliegt. Dann muß

$$f(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty$$

gelten, woraus die Existenz von R folgt.

Fall $r_0 < \infty$: Wenn

$$f(r) \rightarrow c, 1 < c \leq \infty \quad (4.3)$$

gilt, dann existiert R . Sonst existiert R nicht. Die Aussage (4.3) gilt zum Beispiel für $X \sim \text{Exp}(\theta)$ wegen $f(r) \xrightarrow{r \rightarrow r_0 = \theta} \infty$.

²In der Literatur meist kurz $f \in C^\infty[0, r_0)$.

Mit dem Anpassungskoeffizienten läßt sich die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(s)$ exponentiell abschätzen:

Satz 4.2

Cramer-Lundberg-Ungleichung: Für alle $s \geq 0$ gilt

$$\psi(s) \leq e^{-Rs}$$

Korollar 4.1

Für risikoarme Bestände (für die R existiert), ist Versicherung „risikolos“ in dem Sinne, daß $\psi(s)$ durch die Wahl von s sehr klein gemacht werden kann.

Ist zum Beispiel $\varepsilon > 0$ eine strategisch zulässige Ruinwahrscheinlichkeit³, so bestimmt sich s aus

$$s = -\frac{1}{R} \ln \varepsilon$$

Praktisch ist Versicherungsgeschäft jedoch *nicht* „risikolos“. Das bedeutet, daß in für die Praxis relevanten Modellen der Anpassungskoeffizient R nicht existiert. Dies ist der Fall, wenn eine der beiden Situationen vorliegt:

- X_1 besitzt eine Großschadenverteilung, so daß

$$\mathcal{E}e^{rX_1} = \infty$$

für alle $r > 0$ gilt. Dies ist die Hauptursache für das Risiko des Versicherers.

- Nicht ausreichende Prämie, zum Beispiel $\pi \leq \mathcal{E}X_1$, ist der zweite wichtige Risikofaktor⁴.

Ein Anpassungskoeffizient existiert nicht für folgende Verteilungen:

- Paretoverteilung
- LogNormalverteilung
- Weibullverteilung (je nach Parameter)
- LogGammaverteilung

³In der Praxis liegt ε je nach Risikobereitschaft zwischen 10^{-5} und 10^{-3}

⁴häufig in Industrie-Feuer-, Waren- und Transportversicherung

Beweis 4.2

(von Satz 4.2) Wegen $\psi_T(s) \nearrow \psi(s)$ genügt es zu zeigen, daß

$$\forall T : \psi_T(s) \leq e^{-Rs}.$$

Dies geschieht über Induktion nach T . Wir betrachten auch $s < 0$ und setzen für diese s $\psi_T(s) := 1$. Dann ist $\psi_T(s) \leq e^{-Rs}$ selbstverständlich. Daher sei in der folgenden Induktion $s \geq 0$.

Induktionsanfang: ($T = 1$) Wir benutzen Satz (2.6) mit $g(x) = \exp(Rx)$ und erhalten wegen $\mathcal{E} \exp(RX) = 1$

$$\mathcal{P}\{Z_1 > s\} \leq \mathcal{E} e^{RZ_1} e^{-Rs} = e^{-Rs}$$

Induktionsschritt: ($T \rightarrow T + 1$)

$$\begin{aligned} \psi_{T+1}(s) &= \mathcal{P}\{Z_1 + \dots + Z_t > s \text{ für ein } 1 \leq t \leq T + 1\} \\ &= \mathcal{P}\{Z_1 > s\} + \mathcal{P}\{Z_1 \leq s \wedge Z_2 + \dots + Z_t > s - Z_1 \text{ für ein } 2 \leq t \leq T + 1\} \\ &= \mathcal{E} \psi_T(s - Z_1) \\ &\leq \mathcal{E} e^{-R(s-Z_1)} = e^{-Rs} \end{aligned}$$

Nach Fubini kann man die Wahrscheinlichkeit des zweiten Ereignisses in der ersten Zeile auf der rechten Seite berechnen, indem man erst bezüglich Z_2, \dots, Z_{T+1} (bei festgehaltenem Z_1) ausintegriert und dann die berechnete Funktion (von Z_1) auf $\{Z_1 \leq s\}$ bezüglich Z_1 ausintegriert. Bei festgehaltenem Wert $Z_1 \leq s$ gilt

$$\mathcal{P}\{Z_2 + \dots + Z_t > s - Z_1 \text{ für ein } 2 \leq t \leq T + 1\} = \psi_T(s - Z_1).$$

Somit wird

$$\psi_{T+1} = \mathcal{P}\{Z_1 > s\} + \mathcal{E} \psi(s - Z_1) 1_{Z_1 \leq s}$$

was wegen unserer Konvention ($\psi_T(u) = 1$ für $u < 0$) mit $\mathcal{E} \psi(s - Z_1)$ übereinstimmt. In der letzten Abschätzung benutzen wir die Induktionsvoraussetzung $\psi_T(u) \leq e^{-Ru}$ für alle u .

Diese Abschätzung läßt sich in folgendem Sinne nicht weiter verbessern:

Satz 4.3

Sei $\mathcal{E} Z_1 e^{RZ_1} < \infty$, und Z_1 sei nicht arithmetisch⁵. Dann gilt

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \psi(s) e^{Rs} = C$$

mit $0 < C \leq 1$.

Bem.:

⁵d.h. es gibt kein $h > 0$ mit $\mathcal{P}\{Z_1 \in \{0, \pm h, \pm 2h, \dots\}\} = 1$

- Die Zahl $\mathcal{E}Z_1 e^{RZ_1}$ ist die Ableitung der Funktion $r \mapsto \mathcal{E}e^{rZ_1}$ im Punkte R . Sie ist immer positiv.
- Der Beweis des Satzes findet sich in [12] in Kapitel 8.
- Die Bedingung „ Z_1 nicht arithmetisch“ braucht man, weil für arithmetisches Z_1 $\psi(s)$ konstant ist auf den Intervallen $(kh, (k+1)h)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Hier gilt die analoge Aussage

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(nh) e^{-Rnh} = C,$$

die incl. ihres Beweises ebenfalls in Kapitel 8 von [12] nachgelesen werden kann.

4.3 Faltungsformel für die Ruinwahrscheinlichkeit

Sei $\psi(s)$ die diskrete Ruinwahrscheinlichkeit. Die X_1, X_2, \dots seien wieder stochastisch unabhängig und identisch verteilt. $\pi > \mathcal{E}X_1$ sei die Jahresprämie. Dann gilt

$$0 \leq p = \psi(0) < 1.$$

Darüberhinaus benötigen wir noch die folgende

Definition 4.1

Sei wieder $Z_i := X_i - \pi$ der Überschuß der Schäden des i -ten Jahres über die Prämie für diesen Zeitraum. Wenn wir die Z_i nun aufsummieren, erhalten wir die Partialsummen $S_n := \sum_{i=1}^n Z_i$, $n \geq 1$, $S_0 = 0$. Da die Z_i durchaus negativ sein können (dies ist bei manchen Versicherungszweigen sogar der Normalfall), kann S_n für $n \nearrow$ sowohl fallen als auch steigen. Falls S_n einen neuen *positiven* „historischen Höchststand“ erreicht, so nennt man dies einen *Rekord* und S_n eine *Rekordhöhe*. Uns interessiert hier die Verteilung der *ersten* Rekordhöhe

$$\mathbb{H}(A) = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P} \left\{ \left(\forall j \in \{1, \dots, n-1\} : \sum_{i=1}^j Z_i \leq 0 \right) \wedge \left(0 < \sum_{i=1}^n Z_i \in A \right) \right\}$$

Die Normierung zur Gesamtwahrscheinlichkeit 1 ist erforderlich, weil nur mit Wahrscheinlichkeit p mindestens eine positive Partialsumme existiert.

Beispiel 4.1

Sei $\pi = 1$ konstant und $X_i = (0, 1, 0, 2, 0.5, 1, 1.7, 0, 1, \dots)$. Dann ist $S = (S_1, S_2, \dots) = (-1, -1, -2, 0, -0.5, -0.5, 0.2, -0.8, -0.8, \dots)$. Die erste Rekordhöhe tritt im 7. Jahr auf (alle vorherigen Werte waren nichtpositiv) und hat 0.2 als Wert.

Mit diesem \mathbb{H} gilt die Faltungsformel

$$\psi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p) p^k \mathbb{H}^{*k}(s, \infty). \quad (4.4)$$

Beweis 4.3

(heuristische Begründung) Seien L_1, L_2, \dots die aufeinanderfolgenden Rekordhöhenzuwächse, also L_1 wie in Definition 4.1, $L_2 = S_{n_2} - L_1$, wobei n_2 der erste Index mit einer Partialsumme größer als L_1 ist. Genauso seien die restlichen L_i definiert als

$$L_i := S_{n_i} - \sum_{j=1}^{i-1} L_j.$$

Ist N die (endliche) Anzahl von Rekordhöhen, so ist $L_1 + \dots + L_N$ die maximale Partialsumme. Damit läßt sich $\psi(s)$ ausdrücken:

$$\psi(s) = \mathcal{P}\{L_1 + \dots + L_N > s\}$$

N ist geometrisch verteilt mit dem Parameter p , und für gegebenes $N = n$ sind die L_1, \dots, L_n stochastisch unabhängig mit Verteilung \mathbb{H} . Hierzu betrachtet man den Prozeß der Partialsummen S_n nach der ersten Rekordhöhe L_1 , die zum Zeitpunkt n_1 eintritt. Startet man dort neu in Null, so geht der Prozeß mit derselben Stochastik weiter, wie sie zur Zeit 0 vorlag, unabhängig von den Werten S_1, \dots, S_{n-1} („Gedächtnislosigkeit“).

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir noch einmal zusammenfassen:

Die diskreten Ruinwahrscheinlichkeiten $\psi_T(s)$ bei endlichem Planungshorizont sind nicht berechenbar. Wegen der Konvergenz von $\psi_T(s)$ gegen $\psi(s)$ kann man sich auf letztere beschränken. Falls nun der Anpassungskoeffizient existiert, so liefert er die gute Approximation

$$\psi(s) \leq e^{-Rs}.$$

Leider existiert er nicht immer. Jetzt kann man auf die Leiterhöhenverteilung ausweichen. Im Diskreten läßt sie sich bis auf einige besonders gutartige Ausnahmefälle nicht bestimmen. Wenn man nun noch auf das stetige Modell ausweicht, so ist \mathbb{H} in jedem Falls bestimmbar und man ist am Ziel.

4.4 Klassischer Risikoreserveprozeß

Wir stellen uns die Prämie jetzt nicht mehr als eine zu diskreten Zeitpunkten fällige Zahlung, sondern als einen stetigen Mittelzufluß beim Versicherer vor. Bei konstanter *Prämienrate* c belaufen sich die Prämieinnahmen bis zum Zeitpunkt t auf ct . Bis zu diesem Zeitpunkt seien Schäden der Gesamthöhe $\sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ aufgetreten⁶. $N(t)$ ist durch die Wartezeiten $W_i = T_i - T_{i-1}$ zwischen den Schadeneintrittszeitpunkten T_{i-1}, T_i mit $T_0 = 0$:

$$N(t) = \max\{k : W_1 + \dots + W_k \leq t\}$$

definiert.

Wir treffen folgende Modellannahmen:

⁶Wie immer sind die X_i die Schadenhöhen.

- $X_1, X_2, \dots, W_1, W_2, \dots$ seien stochastisch unabhängig .
- $X_i \sim Q, \quad i = 1, 2, \dots$
- $W_i \sim \text{Exp}(\lambda), \quad i = 1, 2, \dots$

λ heißt die *Intensität* der Schadenanzahl. $N(t)$ mit $t > 0$ ist der *Poisson-Prozeß mit Intensität* λ . (Dieser sollte bekannt sein; er ist *das* klassische Modell in der Bedienungstheorie (Warteschlangen, Telefon- und Computernetze). Das Wort *Prozeß* in den Begriffen *stochastischer Prozeß* und *Poissonprozeß* sagt etwas ganz banales aus, nämlich daß man damit Modelle der zeitlichen Entwicklung einer zufallsabhängigen Größe meint und nicht bloß Modelle für eine einzelne zufallsabhängige Zahl. Stochastische Prozesse sind im Gegensatz zu Verteilungen zu sehen. So modelliert man den Verlauf von Aktienkursen (oder Schadenzahlungen) im Zeitablauf mit stochastischen Prozessen, während man den Gesamtschaden eines Jahres mit einer Verteilung modelliert.)

Mit s ist in der Grafik das Startkapital bezeichnet, c findet sich als Steigung der einzelnen Strecken wieder.

Der so modellierte Reserveprozeß hat die folgenden Eigenschaften:

- $X_1 + \dots + X_{N(t)} \sim \text{PSV}(\lambda t, Q)$
- $\mathcal{E}(X_1 + \dots + X_{N(t)}) = \lambda t \mu$ mit $\mu = \mathcal{E}X_1$
- $\text{Var}(X_1 + \dots + X_{N(t)}) = \text{Var}(S_t) = \lambda t \mathcal{E}X_1^2$

Die Ruinwahrscheinlichkeit ist dann

$$\psi(s) = \mathcal{P}\{\exists t > 0 : S_t > s\} = \mathcal{P}\{\exists n : S_{T_n} > s\} = \mathcal{P}\{\exists n : \sum_{i=1}^n (X_i - cW_i) > s\}$$

Diese Beziehung führt uns vom stetigen Fall wieder zur diskreten Ruinwahrscheinlichkeit mit

$$Z_i = X_i - cW_i.$$

Wir können daher die dort gewonnenen Erkenntnisse übertragen:

- $\forall s > 0 : \psi(s) = 1$, falls nur $\mathcal{E}Z_1 \geq 0$ ist⁷.

⁷Für $\mathcal{E}Z_1 > 0$ ist das Resultat wohl intuitiv klar. Wichtig ist, das der Ruin auch noch im Fall $\mathcal{E}Z_1 = 0$ sicher ist!

Eine andere Charakterisierung der technischen Ruinsituation ist

$$\mu - \frac{c}{\lambda} \geq 0,$$

das heißt der Erwartungsschaden deckt die Prämie nicht, die auf den Zeitraum entfällt, in der gerade ein Schaden erwartet wird. Dies ist natürlich gleichbedeutend⁸ mit

$$\lambda\mu \geq c,$$

was aussagt, daß die Prämie einer Periode nicht ausreicht, um den erwarteten Periodenschaden⁹ zu decken.

Logischerweise streben die Versicherer immer

$$c > \lambda\mu$$

an, was daher auch wir im folgenden immer voraussetzen wollen.

- $\psi(s) \leq e^{-Rs}$, $s \geq 0$, wobei R der Anpassungskoeffizient von Z_1 ist, also die Lösung von

$$\mathcal{E}e^{rZ_1} = 1. \quad (4.5)$$

Sei $M(r)$ die momenterzeugende Funktion von Q (bzw. X_1). Dann ist wegen

$$\mathcal{E}e^{-rcW_1} = \frac{\lambda}{\lambda + rc}$$

und

$$1 = \mathcal{E}e^{rZ_1} = \mathcal{E}e^{rX_1 - rcW_1} = \mathcal{E}e^{rX} \mathcal{E}e^{-rcW_1} = M(r) \frac{\lambda}{\lambda + rc}$$

die Lösung von (4.5) gerade die Lösung der Gleichung

$$\lambda + rc = \lambda M(r).$$

Bem.: Dies war gerade die Gleichung für den Anpassungskoeffizienten bei Schäden mit Verteilung $\text{PSV}(\lambda, Q)$ und $\pi = c$.

Im stetigen Fall kann man \mathbb{H} berechnen! \mathbb{H} hat die Dichte¹⁰

$$x \mapsto \frac{1}{\mu} Q(x, \infty), \quad x > 0$$

Ferner ist hier

$$\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}.$$

d.h. die Ruinwahrscheinlichkeit bei Startkapital 0 ist der Quotient aus Durchschnittsschaden pro Zeiteinheit und Prämie pro Zeiteinheit.

Somit kann man $\psi(s)$ aus der Faltungsformel berechnen¹¹.

⁸nach Multiplikation mit λ

⁹erwartete durchschnittliche Schadenhöhe multipliziert mit der erwarteten Schadenzahl

¹⁰Dies *ist* eine Dichte!

¹¹mittels Panjer-Rekursion und ähnlicher Hilfsmittel

Beispiel 4.2

Sei $X \sim \text{Exp}(\theta)$. Dann ist $\mathbb{H} = \text{Exp}(\theta)$, denn es gilt $\mu = \frac{1}{\theta}$ und $\mathcal{P}\{X > x\} = e^{-\theta x}$, $x > 0$, womit die Dichte von \mathbb{H}

$$x \mapsto \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0$$

ist. Der geometrisch/exponentielle Fall, in dem die Summenverteilung berechnet werden kann, ist der Seltene. Die Summenverteilung ist dann

$$(1-p)\delta_0 + p\text{Exp}((1-p)\theta).$$

Also ist

$$\psi(s) = pe^{-(1-p)\theta s} = \frac{\lambda\mu}{c} e^{-(1-\frac{\lambda\mu}{c})\theta s}$$

4.5 Großschadenproblematik

Aus der Faltungsformel folgt

$$\psi(s) \geq (1-p)p\mathbb{H}(s, \infty).$$

Für gewisse Verteilungen ergibt sich hiermit, daß $\psi(s)$ *nicht* exponentiell fällt, wie es das bei Existenz des Anpassungsquotienten tut.

Beispiel 4.3

Sei Q die Paretoverteilung mit Dichte

$$x \mapsto ax^{-(a+1)}, \quad x > 1.$$

Die erwartete Schadenhöhe ist nur im Fall $a > 1$ endlich ($\mu < \infty$), was wir daher annehmen wollen. \mathbb{H} hat die Dichte $\frac{1}{\mu}Q(x, \infty)$, was für $x > 1$ durch $\frac{a-1}{a}x^{-a}$ gegeben ist. Für $s \geq 1$ ist damit $\mathbb{H}(s, \infty) = \frac{1}{a}s^{-(a-1)}$, und dies konvergiert wesentlich langsamer gegen Null (für $s \rightarrow \infty$) als e^{-Rs} .

Ein solches Verhalten finden wir bei einer Klasse von Verteilungen, die alle Pareto-Verteilungen, Log-Normal-Verteilungen, Weibullverteilungen mit Exponenten größer als 1 und alle Log-Gamma-Verteilungen enthält. Für diese gilt nach der Faltungsformel und nach unserem Satz

3.5

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\psi(s)}{\mathbb{H}(s, \infty)} = \frac{p}{1-p}.$$

Hierbei ist zu beachten, daß die Bedingung an die Schadenzahlverteilung R des Satzes im Fall geometrischer Verteilungen immer erfüllt ist. Das obige Verhalten der Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(s)$ hängt von der Prämie c nur über p ab!

In der Praxis werden Probleme mit Großschäden durch Risikoteilung (Rückversicherung) und andere risikopolitische Entscheidungen (Kumulschadenvermeidung, Summenbegrenzung) gelöst. Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir nachrechnen, daß die Loggammaverteilungen subexponentiell sind.

Beispiel 4.4

Sei Q eine Loggammaverteilung mit Dichte

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\beta+1)} (\log(x))^{\alpha-1}, \quad x > 1.$$

Dann gilt

$$Q(x, \infty) \sim \frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x^{-\beta} (\log(x))^{\alpha-1}.$$

Daraus erhalten wir

$$r(x) \sim \beta/x,$$

was $\lim xr(x) = \beta$ impliziert, woraus Subexponentialität von Q folgt; man beachte dazu, daß die Dichte von Q schließlich monoton fallend ist.

Kapitel 5

Prämienprinzipien

5.1 Übersicht

Ist X das Risiko in einem Versicherungsvertrag, so soll im folgenden die Prämie π für X nur von der Verteilung von X abhängen. Gemeint ist hier die Risikoprämie ohne Kosten- und Gewinnanteil. In der Praxis hängt π noch von anderen Größen ab:

- Größe des Versicherers (besserer Ausgleich im Kollektiv möglich)
- Marktdaten (Zins, Nachfrage, Preise der Konkurrenz...)
- eigene strategische Ziele ...

5.2 Ökonomische und mathematische Eigenschaften

Mathematisch ist die Festlegung dieser Risikoprämie eine Abbildung, die Verteilungen positive reelle Zahlen zuordnet. Solche Prämienprinzipien sind:

- Nettorisikoprämienprinzip: $\pi(X) = \mathcal{E}X$
- Erwartungswertprinzip: $\pi(X) = \mathcal{E}X(1 + \beta)$
- Standardabweichungsprinzip: $\pi(X) = \mathcal{E}X + \beta\sqrt{\text{Var}(X)}$
- Varianzprinzip: $\pi(X) = \mathcal{E}X + \beta\text{Var}(X)$
In all diesen Fällen muß $\beta > 0$ gelten.
- Nullnutzenprinzip: $\pi(X)$ ergibt sich aus der Lösung der Identität

$$\mathcal{E}u(s + \pi - X) = u(s). \tag{5.1}$$

u ist eine Nutzenfunktion, d.h. $u' > 0$, $u'' \leq 0$ (Der Nutzen steigt mit der Höhe des Kapitals, der Nutzenzuwachs nimmt dabei jedoch ab.).

s ist das Startkapital.

Gleichung (5.1) bedeutet also, daß der Nutzen ohne Versicherungsgeschäft und der erwartete Nutzen mit Versicherungsgeschäft identisch sind.

- Exponentialprinzip: Spezialfall des Nullnutzenprinzips mit

$$u = 1 - e^{-ax}.$$

Hierbei wird das Prämienprinzip natürlich immer nur auf solche Zufallsvariable angewendet, für welche die Zahl $\pi(X)$ auch berechnet werden kann. Also wird man das Standardabweichungsprinzip nur bei Zufallsvariablen anwenden, bei denen das zweite Moment (oder die Varianz) endlich ist. Solche Zufallsvariable nennen wir *zulässig für das Prämienprinzip* π oder kurz *zulässig*.

Bem.:

- Erwartungswert-, Standardabweichungs- und Varianzprinzip sind für die Praxis wichtig, während das Nullnutzenprinzip für die Theorie wichtig ist.
- Für das Nullnutzenprinzip gilt $\pi(X) \geq \mathcal{E}X$, denn $\pi(X) < \mathcal{E}X$ würde

$$\begin{aligned} u(s) &= \mathcal{E}u(s + \pi(X) - X) \stackrel{u' > 0}{<} \mathcal{E}u(s + \mathcal{E}X - X) \\ &\stackrel{\text{Jensen'sche Ungl.}}{\leq} u(\mathcal{E}(s + \mathcal{E}X - X)) \\ &= u(s), \end{aligned}$$

also einen Widerspruch implizieren. Oben benutzte Jensensche Ungleichung wird weiter unten angegeben.

Beispiel 5.1

Für die exponentielle Nutzenfunktion $u(x) = 1 - e^{-ax}$ ist

$$\pi(X) = \frac{1}{a} \log \mathcal{E}e^{aX}.$$

Der Parameter a heißt *Risikoaversion*, die so berechnete Prämie gehört zum Exponentialprinzip. Je größer a ist, umso größer wird der Sicherheitszuschlag.

Die oben benutzte Jensensche Ungleichung besagt folgendes:

Satz 5.1 (Jensensche Ungleichung)

Ist g eine konvexe Funktion (d.h. $g'' > 0$, falls die zweite Ableitung existiert), dann gilt für jede Zufallsvariable X , für welche $\mathcal{E}X$ und $\mathcal{E}g(X)$ existieren

$$\mathcal{E}g(X) \geq g(\mathcal{E}X).$$

Das bekannteste Beispiel für diese Ungleichung erhält man mit $g(x) = x^2$: $\mathcal{E}X^2 \geq (\mathcal{E}X)^2$.

5.2.1 Eigenschaften von Prämienprinzipien

Prämienprinzipien sollten aus praktischer wie auch aus theoretischer Sicht wünschenswerte Eigenschaften besitzen. Solche Eigenschaften sind in den letzten zwanzig Jahren in großer Vielzahl vorgeschlagen und diskutiert worden. Belege hierfür sind die Bücher von Gerber (1979) und Heilmann (1987). Hier werden nur wenige wesentliche Aspekte dieser Diskussion aufgegriffen.

Definition 5.1

Ein Prämienprinzip π heißt

- verschiebungsinvariant, wenn für alle zulässigen Risiken X und alle Konstanten a gilt:

$$\pi(X + a) = \pi(X) + a.$$

- homogen, wenn für alle zulässigen Risiken X und alle positiven Konstanten a

$$\pi(aX) = a\pi(X).$$

- additiv, wenn für je zwei zulässige stochastisch unabhängige Risiken X, Y

$$\pi(X + Y) = \pi(X) + \pi(Y).$$

- subadditiv, wenn für je zwei zulässige stochastisch unabhängige Risiken X, Y

$$\pi(X + Y) \leq \pi(X) + \pi(Y).$$

Bemerkungen

- Alle hier betrachteten Prämienprinzipien sind verschiebungsinvariant. Konstante Risiken $X = a$ stellen nur einen Geldtausch dar, der sich nicht auf die Risikosituation des Versicherten und des Versicherers auswirkt. Konstante Risiken haben den entsprechenden Preis: $\pi(X) = a$.
- Homogen sind die Nettorisikoprämie, das Erwartungswertprinzip und das Standardabweichungsprinzip. Die Eigenschaft Homogenität ist nicht ganz intuitiv: für ein Versicherungsunternehmen verändert sich ein Todesfallrisiko (mit Sterbewahrscheinlichkeit 0,001) wesentlich, wenn die Versicherungssumme von 1 Million auf 100 Millionen und die Prämie von 2.000 auf 200.000 erhöht wird.
- Additiv sind das Nettorisiko-, das Erwartungswert-, das Varianz- und das Exponentialprinzip. Additivität ist von Bedeutung, wenn eine Bestandsprämie auf einzelne Verträge verteilt werden soll.
- Subadditiv sind alle Prinzipien, die additiv sind, sowie das Standardabweichungsprinzip. Subadditivität entspricht dem Ausgleich im Kollektiv: die Prämie aus einem Kollektiv von unabhängigen Risiken kann kleiner sein als die Summe der für die Einzelrisiken erforderlichen Prämien. (Allerdings wird für die Berechnung einer erforderlichen Prämie schon die Bestandsbildung berücksichtigt.)

5.2.2 Exponentialprinzip — Anpassungskoeffizient

Ist π mit dem Exponentialprinzip errechnet, so ist a (die zugehörige Risikoaversion) der Anpassungskoeffizient des Problems. Es gilt nämlich

$$\mathcal{E}e^{a(X-\pi)} = \mathcal{E}e^{aX} \cdot e^{-a \cdot \frac{1}{a} \ln \mathcal{E}e^{aX}} = 1$$

und unter der Annahme, daß die Integrale existieren, ist der Anpassungskoeffizient eindeutig.

Dieser Zusammenhang wird dazu angewandt, eine Prämie ruinthoretisch zu begründen: Ist die Ruinwahrscheinlichkeit $\varepsilon > 0$ tolerierbar und s das Startkapital, so kann die Prämie so bestimmt werden, daß

$$\psi(s) \leq \varepsilon$$

gilt, indem man a so wählt, daß $e^{-as} = \varepsilon$ ist. Dann berechnet man π mit dem Exponentialprinzip mit Risikoaversion a .

5.2.3 Exponentialprinzip — Varianzprinzip

Ist

$$\pi_1 = \mathcal{E}X + \frac{a}{2} \text{Var}(X)$$

und

$$\pi_2 = \frac{1}{a} \ln(\mathcal{E}e^{aX}),$$

dann gilt

$$|\pi_1 - \pi_2| \leq \frac{a^2}{b} \mathcal{E}X^3 e^{aX}.$$

Somit wird π_2 (nach dem Exponentialprinzip) approximiert durch die Prämie nach dem Varianzprinzip mit dem Parameter $\beta = \frac{a}{2}$. Die ruinthoretische Begründung für β nach dem Varianzprinzip ist somit

$$\beta = \frac{1}{2s} |\ln \varepsilon|.$$

Dies entspricht gerade der Beziehung

$$e^{-as} = \varepsilon$$

aus Abschnitt [5.2.2](#).

Für normalverteiltes X stimmen π_1 und π_2 überein. Für gammaverteiltes X gilt immer $\pi_1 \leq \pi_2$. Diese Beziehung ist aber nicht allgemein wahr. So ist z.B. für X mit $\mathcal{P}\{X = 0\} = \mathcal{P}\{X = 1\} = 1/2$ eine entgegengesetzte Ungleichung wahr: für $a = 5$ gilt $\pi_1 = 1.125$, jedoch $\pi_2 = 0.8627$.

Kapitel 6

Statistische Verfahren

Die Verteilung eines Risikos X ist in der Praxis der Nichtlebensversicherung nicht vorgegeben, sondern ergibt sich aus Beobachtungen und Erfahrungswerten. Ohne Modellvorstellung über die Verteilung¹ benutzt man *nichtparametrische Verfahren*, die auf der *empirischen Verteilung* basieren.

Hat man dagegen eine Modellvorstellung, so werden die Parameter der Verteilung mit sogenannten *parametrischen Verfahren* bestimmt, so zum Beispiel mit der *Maximum-Likelihood-Methode* oder der *Momentenmethode*.

6.1 nichtparametrische Verfahren

Wir werden hier davon ausgehen, daß Beobachtungen X_1, \dots, X_n vorliegen, die stochastisch unabhängig sind und dieselbe Verteilung wie X haben. Die Annahme der Unabhängigkeit ist oft eine akzeptable Einschränkung. Die identische Verteilung liegt dagegen nicht immer vor. Hierfür müssen die Beobachtungen bezüglich bestimmter Effekte² bereinigt werden.

Die *empirische Verteilung* P_n wird aus den Werten x_1, \dots, x_n der Beobachtungen X_1, \dots, X_n gebildet. Sie ist diskret mit der Zähldichte³.

$$p_n(x) = \frac{1}{n} |\{i : 1 \leq i \leq n \wedge x_i = x\}|.$$

Für beliebige Funktionen f ergibt sich der Erwartungswert der Zufallsvariable $f(X)$ bezüglich

¹also beispielsweise die Annahme einer Gamma- oder Log-Gamma-Verteilung

²Inflation, saisonale Schwankungen, Strukturänderung (d.h., daß durch Änderungen in Organisation oder Rechtssprechung die Verteilung der X_i ab $i = m$ verändert ist.)

³Sind die Werte beispielsweise 1, 1.2, 1.3, 1.7, 1.7, 2, 3, 3, 3, so hat $p_n(x)$ für $x \in \{1, 1.2, 1.3, 2\}$ den Wert $\frac{1}{9}$, für $x = 1.7$ den Wert $\frac{2}{9}$ und für $x = 3$ ist $p_n(x) = \frac{3}{9}$

P_n als

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Somit ist

$$\mu(P_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

und

$$\text{Var}(P_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Ist $H(P)$ ein (vom unbekanntem P abhängender) Parameter⁴, so liefert $H(P_n)$ ein nur von den beobachteten Werten abhängenden Schätzwert für $H(P)$. Dieser ist für großes n nahe beim wahren Parameter $H(P)$. Unter technischen Momentenbedingungen⁵, die hier nur bei den Beispielen explizit genannt werden, gilt:

$$\mathcal{P}\{|H(P_n) - H(P)| > \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (6.1)$$

Hier hängt $H(P_n)$ vom Zufall ab. Man müßte genauer schreiben:

$$H(P_n(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))).$$

Beispiel 6.1

- $H(P) = \mu(P)$. Damit ist (6.1) das Gesetz der großen Zahlen, und dieses gilt, wenn $\mu(P)$ existiert.
- $H(P) = \text{Var}(P)$ (vergleiche mit s_n^2). Hier gilt (6.1), wenn $\text{Var}(P) < \infty$.
- $H(P)$ ist die nach dem Nullnutzen-Prinzip implizit definierte Prämie. Entsprechend ist $H(P_n)$ die Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u(s + \pi - X_i) = u(s).$$

Hier ist (6.1) wahr, wenn es Zahlen t_1 und t_2 mit $t_1 < \pi < t_2$ gibt, sodaß

$$\mathcal{E}u(s + t_i - X_i) < \infty, \quad i = 1, 2, \dots$$

gilt. Beim Exponentialprinzip ergibt sich wieder etwas explizites:

$$H(P_n) = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{aX_i} \right).$$

Hier lautet die Momentenbedingung, welche (6.1) impliziert,

$$\mathcal{E}e^{aX_1} < \infty.$$

⁴wie zum Beispiel Mittelwert, Varianz,...

⁵Diese wohlklingende Formulierung will uns sagen: „Falls die Momente existieren“

- Seien λ und c vorgegeben⁶, $H(P)$ der Anpassungskoeffizient des Problems (λ, c, P) , also die Lösung $r > 0$ der Gleichung

$$\lambda + rc = \lambda \mathcal{E}e^{rX}, \quad X \sim P.$$

$H(P_n)$ ist die positive Lösung der Gleichung

$$\lambda + rc = \lambda \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{rX_i}.$$

Dies löst man iterativ. Sei R_n die positive Lösung. Man kann für $r > 0$ testen, ob $r > R_n$ oder $r \leq R_n$ ist:

$$\lambda + rc > \lambda \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{rX_i} \implies r < R_n$$

Das Newton-Verfahren ist hier instabil!

- empirische Prämienberechnung mittels $H(P) = \mu(P) + \beta \text{Var}(P)$:

$$H(P_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \beta \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Durch den Faktor $\frac{n}{n-1}$ bei der Varianz (s. Abschnitt 2.2) wird der Schätzer *erwartungstreu*. Dies ist wichtig für die Anwendung und für kleine n von Bedeutung⁷.

6.2 Parametrische Verfahren

6.2.1 Maximum-Likelihood-Methode

Hier geht man von einer Modellvorstellung über die Verteilung P aus⁸. Dabei wird P bis auf einige wenige Parameter spezifiziert. Diese Parameter werden aus den Daten abgeleitet. In der Regel ist die *Maximum-Likelihood-Methode* das beste Verfahren für die Bestimmung der Parameter. Sei θ der reelle oder mehrdimensionale⁹ Parameter, der bestimmt werden soll. Sei $p(x, \theta)$ die Dichte oder Zähldichte der Verteilung mit Parameter θ . Mit den Beobachtungen x_1, \dots, x_n bildet man

$$L(\theta) = \ln \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta)$$

und maximiert diese Funktion als Funktion in der Variablen θ . Der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ ist der Wert von θ , für den $L(\theta)$ maximal wird.

⁶ $\lambda > 0, c > 0$

⁷(siehe dazu auch Abschnitt 6.3)

⁸zum Beispiel „ P ist eine Gammaverteilung“ oder „ P ist eine Log-Normalverteilung“

⁹Wir schreiben dann $\theta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_r)$.

(heuristische Begründung:) $\prod p(x_i, \theta)$ ist für festes θ die Dichte der gemeinsamen Verteilung von X_1, \dots, X_n , wenn $X_i \sim P_\theta$. Diese Zahl stellt im Wesentlichen ein Maß für die Wahrscheinlichkeit dar, daß man bei Beobachtung von X_1, \dots, X_n die Zahlen x_1, \dots, x_n sieht. Kleine Werte von $\prod p(x_i, \theta)$ besagen, daß das zugehörige θ nicht zu den Daten x_1, \dots, x_n paßt. Große θ -Werte sind nach Beobachtung von x_1, \dots, x_n eher plausibel. Wir maximieren deshalb $\prod p(x_i, \theta)$ in θ . Das ist wegen der Isotonie¹⁰ des Logarithmus dasselbe wie die Maximierung von $L(\theta)$.

Die Berechnung des Maximum-Likelihood-Schätzers geht nach folgendem Schema vor sich:

1. $L(\theta)$ berechnen
2. (partielle) Ableitungen $\frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta)$ bzw. $\frac{\partial}{\partial \theta_i} L(\theta)$, $i = 1, \dots, r$ berechnen
3. Ableitung(en) Null setzen, Gleichung(ssystem) lösen
4. Überprüfung, ob die Lösung tatsächlich ein Maximum ist.

Beispiel 6.2

- Seien nun X_1, \dots, X_n $\text{Par}^*(1, \vartheta)$ -verteilte Zufallsvariablen mit der Dichte

$$p(x_i, \vartheta) = \vartheta x_i^{-(\vartheta+1)}, \quad x_i \geq 1.$$

Wenn eine der Beobachtungen x_i kleiner als 1 ist, dann stimmt das Modell nicht. Seien daher nun alle $x_i \geq 1$. Dann gilt:

$$L(\theta) = \ln \left(\prod_{i=1}^n p(x_i, \vartheta) \right) = \sum_{i=1}^n \ln \left(\vartheta x_i^{-(\vartheta+1)} \right) = n \ln \vartheta - (\vartheta + 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i,$$

und

$$0 = \frac{\partial}{\partial \vartheta} L(\theta) = \frac{n}{\vartheta} - \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

liefert

$$\vartheta = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$$

Wir schreiben: Diese Lösung ϑ ist der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$.

- Sei $\theta = (a, b)$ mit $a, b > 0$ (also $r = 2$) und P_θ die Weibullverteilung¹¹ mit der Dichte

$$p(x, \theta) = a^b b x^{b-1} e^{-(ax)^b}, \quad x > 0.$$

Wir nehmen wieder $\forall i : x_i > 0$ an und erhalten

$$L(\theta) = nb \ln a + n \ln b + (b-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n (ax_i)^b$$

¹⁰isoton:= monoton wachsend

¹¹Die Dichte der Weibullverteilung ist in der Übersicht (Anhang B) in der Form $abx^{b-1}e^{-ax^b}$, $x > 0$ angegeben. Die hier gewählte Form ist eine Umparametrisierung.

im ersten Schritt des obigen Verfahrens. Dies liefert weiterhin

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial a} L = \frac{nb}{a} - \frac{b}{a} \sum_{i=1}^n (ax_i)^b \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial b} L = n \ln a + \frac{n}{b} + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n (ax_i)^b \ln(ax_i). \end{aligned}$$

Dies System vereinfacht man leicht zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i)^b &= 1 \\ \frac{n}{b} + \sum_{i=1}^n \ln x_i &= \sum_{i=1}^n (ax_i)^b \ln x_i \end{aligned}$$

und ¹² weiter zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} &= \sqrt[b]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^b} \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^b \ln x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^b} \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung wird nach b aufgelöst, das Resultat in die erste Gleichung eingesetzt und dann a bestimmt.

Dies geht nicht immer so einfach. Häufiger benötigt man Iterationen, bei denen so lange iterativ in Gleichungen eingesetzt wird, bis sich die Werte nicht mehr spürbar verändern. Hierfür benötigt man einen Startschätzer, der mit der Momentenmethode (s. Abschnitt 6.2.2) gefunden wird.

Beispiel 6.3

Sei $\theta = (r, p)$, $r > 0$, $0 < p < 1$ und $P_\theta = \text{NB}(r, p)$ mit

$$p(x_i, \theta) = \binom{x_i + r - 1}{x_i} p^{x_i} (1-p)^r, \quad x_i = 0, 1, 2, \dots$$

Wenn einer der beobachteten Werte nicht in \mathbb{N}_0 liegt, so ist das Modell falsch. Also nehmen wir $x_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ an:

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \sum_{i=1}^n \ln \left(\binom{x_i + r - 1}{x_i} p^{x_i} (1-p)^r \right) \\ &= nr \ln(1-p) + \ln p \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{(x_i + r - 1)!}{x_i! (r - 1)!} \right) \\ &= nr \ln(1-p) + \ln p \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) + \sum_{j=0}^{x_i-1} \ln(r + j) \end{aligned}$$

¹²mittels Einsetzen von $a = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i)^b\right)^{-1}$ aus der ersten in die zweite Gleichung

Das Gleichungssystem lautet

$$0 = \frac{\partial}{\partial p} L(\theta) = -\frac{nr}{1-p} + \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n x_i \quad (6.2)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} L(\theta) = n \ln(1-p) + \sum_{j=0}^{x_i-1} \frac{1}{r+j} \quad (6.3)$$

Wir wählen ¹³ einen Startwert r_0 , setzen diesen in (6.3) ein, lösen nach p auf und erhalten p_0 . Anschließend setzen wir p_0 in (6.2) ein, lösen nach r auf und erhalten r_1 . Dieses wechselseitige Einsetzen führen wir solange fort, bis $r_{n+1} - r_n$ und $p_{n+1} - p_n$ klein genug sind. Bei gutem Startwert reichen 5-10 Iterationen! Das Verfahren konvergiert (fast) immer, wenn das Gleichungssystem überhaupt eine Lösung hat.

6.2.1.1 Maximum-Likelihood-Methode bei transformierten Beobachtungen

Manchmal liegen nicht die tatsächlichen Schäden X_i , sondern nur Schadenzahlungen Y_i der Form

$$Y_i = \min(X_i, M)$$

oder

$$Y_i = (X_i - M)^+$$

vor. Im ersteren Fall haben wir es mit einer Haftungsbegrenzung zu tun (s. Abschnitt 2.5.1), im zweiten Fall¹⁴ mit dem Konzept der Selbstbeteiligung (s. Abschnitt 2.5.2). Auch mit solchen Zufallsvariablen Y kann man den Parameter θ mit der Maximum-Likelihood-Methode schätzen. Dabei hat Y eine Verteilung, die in einem Bereich eine Dichte und in einzelnen Punkten eine Zähldichte besitzt. So hat $Y = \min(X, M)$ im Punkte M die (möglicherweise) positive Masse $P\{X \geq M\}$. Die Maximum-Likelihood-Methode basiert dann auf $p(x, \theta)$, wobei an Stellen positiver Masse die Zähldichte für $p(x, \theta)$ genommen wird.

Beispiel 6.4

Sei $X \sim P_\theta = \text{Exp}(\theta)$ und $Y = \min(X, M)$. Dann hat P_θ die Dichte

$$p(x, \theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & 0 < x < M \\ \mathcal{P}\{X \geq M\} = e^{-\theta M} & x = M \end{cases}$$

Damit wird $L(\theta)$ mit $m = \#\{i : x_i \geq M\}$ berechnet zu

$$L(\theta) = -\theta m M + \sum_{x_i < M} \ln(\theta e^{-\theta x_i}) = -\theta m M + (n - m) \ln \theta - \theta \sum_{x_i < M} x_i,$$

woraus sich wegen

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{d\theta} L(\theta) = -mM + \frac{n-m}{\theta} - \sum_{x_i < M} x_i$$

¹³Wie gesagt: Bestimmung mittels Momentenmethode oder „vollständiger Intuition“

¹⁴Zur Notation: $(\cdot)^+ := \max(\cdot, 0)$

unter Benutzung der Identität

$$\sum_{i=1}^n y_i := mM + \sum_{x_i < M} x_i$$

der Maximum-Likelihood-Schätzer

$$\hat{\theta} = \frac{n - m}{\sum_{i=1}^n y_i}$$

ergibt.

Frage: Wie kann man die Lösung im Falle $m = n$ interpretieren ?

6.2.2 Momentenschätzer

Hier geht es um eine Methode zur Berechnung von Startwerten (Startschätzern), die man bei der Berechnung von Maximum-Likelihood-Schätzern benötigt. Die Methode liefert Schätzer, die „quick and dirty“ sind, also einfach zu berechnen, aber nicht von guter Qualität¹⁵. Diese Schätzer sollen nur in folgendem Sinne konsistent sein:

$$\mathcal{P}\{\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \rightarrow \theta\} = 1 \quad (6.4)$$

für alle möglichen Parameter θ . Ist beispielsweise

$$\theta = \mathcal{E}X_1,$$

so wird durch

$$\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

eine Folge von Schätzern definiert, die (6.4) erfüllt. Für Parameter θ , die nicht den Mittelwert $\mathcal{E}X_1$ darstellen, werden die Schätzer durch transformierte Zufallsvariablen

$$Y_i = f(X_i), \quad i = 1, \dots, n$$

erzeugt:

Ist der Parameter θ darstellbar als

$$\theta = \mathcal{E}f(X_1) = \mathcal{E}Y_1,$$

so wird durch

$$\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i)$$

¹⁵was die Genauigkeit betrifft

eine Folge von Schätzern definiert, die (6.4) erfüllt. Eine zusätzliche Möglichkeit für die Konstruktion von Schätzern, die (6.4) erfüllen, besteht darin, den Parameter zu transformieren. Ist g stetig, so gilt mit

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \longrightarrow \mathcal{E}f(X_1)$$

auch die Beziehung

$$g\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i)\right) \longrightarrow g(\mathcal{E}f(X_1)).$$

Wenn es also gelingt, Funktionen f und g so anzugeben, daß

$$\theta = g(\mathcal{E}f(X_1)),$$

dann ist die Beziehung (6.4) wahr für den Schätzer

$$\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = g\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i)\right). \quad (6.5)$$

Schätzer der Form (6.5) nennt man *Momentenschätzer*.

Beispiel 6.5

Sei $\theta = (r, p)$, $P_\theta = \text{NB}(r, p)$. $\mathcal{E}X_1 = \frac{rp}{1-p}$ ergibt sich aus (6.6) und (6.7). Ferner ist

$$\text{Var}(X_1) = \frac{rp^2}{(1-p)^2}$$

und damit

$$r = \frac{\mathcal{E}^2 X_1}{\text{Var}(X_1)}$$

und als Startschätzer für r

$$\hat{r} = \frac{(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i)^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

Dieser Wert bietet sich als r_0 für die Iteration bei der Berechnung des Maximum-Likelihood-Schätzers an.

Ein gutes Hilfsmittel für die Berechnung von $\mathcal{E}f(X_1)$ ist die Log-Likelihood-Funktion. Ist $p(x, \theta)$ die Dichte von X_1 , wenn θ der Parameter ist, so wird

$$l(x, \theta) = \ln p(x, \theta) \quad (6.6)$$

Log-Likelihood-Funktion genannt. Die Ableitung von l nach θ hat nämlich Erwartungswert Null:

$$\mathcal{E} \frac{d}{d\theta} l(X_1, \theta) = 0 \quad (6.7)$$

Ist der Parameter $\theta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_r)$ ein Vektor, so gilt dieselbe Aussage für alle partiellen Ableitungen:

$$\mathcal{E} \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} l(X_1, \theta) = 0, \quad j = 1, \dots, r.$$

Beispiel 6.6

Sei $\theta = (a, b)$ mit $a, b > 0$ und $P_\theta = \Gamma(a, b)$. Dann ist

$$p(x, \theta) = \frac{1}{\Gamma(b)} a^b x^{b-1} e^{-ax}$$

und

$$l(x, \theta) = -\ln \Gamma(b) + b \ln a + (b-1) \ln x - ax$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} l(x, \theta) &= \frac{b}{a} - x \\ \frac{\partial}{\partial b} l(x, \theta) &= -\frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} + \ln a + \ln x \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\mathcal{E} X_1 = \frac{b}{a}$$

und

$$\mathcal{E} \ln(X_1) = \frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} - \ln a.$$

Ist g die Inverse der Funktion

$$b \mapsto \frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} - \ln b,$$

so finden wir als Schätzer für den Parameter

$$b = g\left(\frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} - \ln b\right)$$

wegen

$$\mathcal{E} \ln(X_1) - \ln \mathcal{E}(X_1) = \frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} - \ln b$$

den Ausdruck

$$g\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) - \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)\right).$$

6.2.3 Modelle für inhomogene Bestände: lineare Modelle und Alternativen

6.2.3.1 Kovariate Veränderliche

Gerade im Versicherungsbereich sind die vorhandenen Daten teils stochastisch, teils als konstant aufzufassen. Die Schadenhöhe X eines Vertrages ist stochastisch, die Ausprägungen

a_1, \dots, a_r der Tarifmerkmale (und andere erfaßte Informationen) sind konstant. Dies kann man modellieren als

$$X \sim P_\theta, \quad \theta = f(a_1, \dots, a_r).$$

Modelle dieser Form sind zum Beispiel die *linearen Modelle*

$$X = \sum_{i=1}^r a_i \beta_i + e.$$

Hierbei ist $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)$ ein (unbekannter) Regressionsvektor und e eine (normalverteilte) Zufallsvariable mit Erwartungswert Null. Für die Versicherungsmathematik wichtiger sind die *verallgemeinerten linearen Modelle*, in denen ein parametrisches Modell mit Dichte (vereinfacht)

$$p(x, \theta) = e^{\theta x - c(\theta)} \quad (6.8)$$

angenommen wird, wobei θ durch

$$\theta = g \left(\sum_{i=1}^r a_i \beta_i \right)$$

gegeben ist. Der Parametervektor β wird mit dem Maximum-Likelihood-Verfahren geschätzt. Dichten der Form (6.8) liegen zum Beispiel für Poisson- und Gammaverteilungen vor. Der Vorteil dieses Ansatzes liegt darin, daß man Schadendaten aus unterschiedlichen Verträgen zur Schätzung des (vom einzelnen Vertrag unabhängigen) Regressionsvektors β benutzen kann. Dieser Vorteil wird im folgenden Beispiel sichtbar.

Beispiel 6.7

Gesucht wird der Erwartungswert der Schadenhöhe für Kfz-Haftpflicht-Verträge. Aufgrund der dafür relevanten Tarifmerkmale¹⁶ kann man mehr als 8000 verschiedene Verträge unterscheiden, für die jeweils ein Erwartungswert zu schätzen ist. Diese große Anzahl von Parametern kann man nur mit einer riesigen Menge von Schadendaten bestimmen, und hierfür reicht die Schadenstatistik keines einzelnen Versicherers aus. Mit verallgemeinerten linearen Modellen kann man die Anzahl der Parameter¹⁷ auf weniger als 100 reduzieren, und für eine solche Anzahl von Parametern reichen die Schadendaten eines großen Versicherers aus.

Die Anwendung der GLM (*generalized linear models*) ist gerade heute – durch die Notwendigkeit der Konstruktion neuer Tarifsyste und die Erstellung hauseigener Schadenstatistiken und Haustarife – besonders interessant.

6.2.4 Bayes'sches Verfahren

Eine Möglichkeit, Schätzer zu beurteilen, besteht im mittleren quadratischen Fehler

$$\mathcal{E}(\hat{\theta} - \theta)^2.$$

¹⁶Region, Wagnisstärke, Schadenfreiheit, Kfz-Typ. . .

¹⁷dies sind hier die β 's

Dieser mittlere quadratische Fehler ist folgendermaßen zu interpretieren: Ist θ der wahre Parameter, so sind X_1, \dots, X_n stochastisch unabhängig mit Verteilung P_θ , und

$$\mathcal{E}(\hat{\theta} - \theta)^2 = \mathcal{E}(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \theta)^2.$$

Hat P_θ die Dichte $p(x, \theta)$, so berechnet sich der mittlere quadratische Fehler so:

$$\mathcal{E}(\hat{\theta} - \theta)^2 = \int \cdots \int (\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n) - \theta)^2 \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta) dx_1 \dots dx_n.$$

Der mittlere quadratische Fehler liefert keine totale Ordnung auf der Menge aller Schätzer $\hat{\theta}$. Es gibt Paare von Schätzern $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$, sodaß für einige θ

$$\mathcal{E}(\hat{\theta}_1 - \theta)^2 < \mathcal{E}(\hat{\theta}_2 - \theta)^2$$

gilt, für andere θ das Gegenteil:

$$\mathcal{E}(\hat{\theta}_1 - \theta)^2 > \mathcal{E}(\hat{\theta}_2 - \theta)^2$$

Wünschenswert wäre jedoch ein kleiner Fehler für *alle* θ . Dies Ziel kann nicht verwirklicht werden. Stattdessen verlangt man zumindest einen kleinen Fehler für *alle plausiblen* Werte von θ . Man faßt hierfür θ als Zufallsvariable auf, deren Verteilung angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit welche θ -Werte in der Natur auftreten. Wir wollen diese Wahrscheinlichkeit im folgenden immer mit einer Dichte $\pi(\theta)$ beschreiben. Große Werte von $\pi(\theta)$ bedeuten eine große Wahrscheinlichkeit für den zugehörigen Wert θ . Die Verteilung von θ ¹⁸ wird *Vorbewertung* oder *a-priori-Verteilung* genannt. Mit dieser Verteilung kann man den mittleren quadratischen Fehler — der ja von θ abhängt — ausintegrieren zu

$$\int \mathcal{E}(\hat{\theta} - \theta)^2 \pi(\theta) d\theta. \quad (6.9)$$

In der sogenannten *Bayes'schen Statistik* wird diese reelle Zahl zur Bewertung vom Schätzer $\hat{\theta}$ herangezogen. Man nennt einen Schätzer $\hat{\theta}$ bezüglich π optimal oder *Bayes'sch*, wenn er den Ausdruck (6.9) minimiert, wenn also für alle anderen Schätzer $\tilde{\theta}$

$$\int \mathcal{E}(\hat{\theta} - \theta)^2 \pi(\theta) d\theta \leq \int \mathcal{E}(\tilde{\theta} - \theta)^2 \pi(\theta) d\theta.$$

Man geht bei der Bestimmung von Bayes-Schätzern wie folgt vor:

- Man lege die Verteilung π fest. Dies ist leichter gesagt als getan. Die Schwierigkeit, π anhand der Vorinformationen zu ermitteln, ist es daher, die häufig zu Kritik am Bayes-Prinzip führt.

¹⁸mit der Dichte $\pi(\theta)$

- Man bestimme $\hat{\theta}$ gemäß

$$\int \mathcal{E}(\hat{\theta} - \theta)^2 \pi(\theta) d\theta = \min_{\hat{\theta}}$$

in der Klasse aller $\hat{\theta}$, für die die linke Seite definiert ist¹⁹. Die Berechnung der Bayes-Schätzer ist rechnerisch aufwendig. Der Bayes-Schätzer hat folgende Form:

$$\hat{\theta} = \frac{\int \theta \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta) \pi(\theta) d\theta}{\int \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta) \pi(\theta) d\theta}$$

Hierbei sind x_1, \dots, x_n die Beobachtungen. Dieser Ausdruck ist nur in wenigen besonders schönen Fällen analytisch zu berechnen. Die numerische Berechnung ist sehr aufwendig²⁰. Man kann diesen Rechenaufwand dadurch vermeiden, daß man $\int \mathcal{E}(\hat{\theta} - \theta)^2 \pi(\theta) d\theta$ in der Klasse aller $\hat{\theta}$ minimiert, die linear von den Beobachtungen abhängen, die also die Form

$$\hat{\theta} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i$$

haben. Diese Vereinfachung findet in der Versicherungspraxis Anwendung.

6.3 Credibility-Theorie und Erfahrungstarifizierung

Credibility-Theorie heißt die vom Bayes-Verfahren abgeleitete Methode, die (vor allem) bei der Erfahrungstarifizierung eingesetzt wird. Das Problem läßt sich am besten an der Kfz-Haftpflicht-Versicherung erläutern²¹. Die Schadenhäufigkeit und die Schadenhöhen, die in einem Vertrag entstehen, hängen von den Tarifmerkmalen ab und von weiteren Kenngrößen, die beim Abschluß eines Vertrages nicht erfaßt werden und wohl auch nicht meßbar sind²². Wir können uns diese Kenngrößen als Risikoparameter θ vorstellen. θ ist nicht direkt beobachtbar. Im Laufe der Vertragsdauer können wir jedoch durch die Schäden, die beobachtet werden, eine immer bessere Vorstellung von θ erhalten. Erfahrungstarifizierung bedeutet nun, die durch die Schäden gewonnene Information über θ bei der Berechnung der Prämie zu berücksichtigen.

Wir betrachten im folgenden nur die Nettorisikoprämie, also den Erwartungswert $\mu(\theta)$ der Schäden im Versicherungsvertrag mit Risikoparameter θ . Für die Schätzung von $\mu(\theta)$ liegen Schadenssummen X_1, \dots, X_n vor. Man sucht einen Schätzer der Form

$$\hat{\mu}(X_1, \dots, X_n).$$

Das Verfahren soll für alle Verträge in gleicher Weise angewandt werden. Hierbei interessiert nicht die Qualität des Verfahrens bei einem einzelnen Vertrag, sondern das Verhalten des

¹⁹d.h. der Erwartungswert existiert

²⁰wegen der auftretenden Produkte

²¹Allerdings wird Credibility-Theorie in diesem Bereich in der Praxis nicht angewandt. Man verwendet hier stattdessen das Bonus-Malus-System.

²²So zum Beispiel fahrerisches Können und Fahrerfahrung sowie Risikobereitschaft des Fahrzeugführers.

Verfahrens bezogen auf den Gesamtbestand. Sind $\theta_1, \dots, \theta_K$ die möglichen θ -Werte im Bestand mit Häufigkeiten n_1, \dots, n_K , so kann man den Gesamtfehler des Verfahrens mit der Zahl

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^K n_i \mathcal{E}(\hat{\mu}(X_1, \dots, X_n) - \mu(\theta_i))^2 \quad (6.10)$$

messen, wobei $n = n_1 + \dots + n_K$ die Zahl der Verträge im Bestand ist. Fassen wir die Zahlen $\frac{n_i}{n}$ als Wahrscheinlichkeiten auf, so hat der Ausdruck (6.10) dieselbe Form wie das Bayes'sche Risiko im vorigen Abschnitt

$$\int \mathcal{E}(\hat{\mu} - \mu(\theta))^2 \pi(\theta) d\theta,$$

nur mit dem Unterschied, daß man statt einer Dichte eine diskrete Vorbewertung hat. Die Vorbewertung heißt in der Risikotheorie „*Strukturverteilung*“²³. Sie gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten die Risikokennzahlen θ im Bestand auftreten.

Eine mögliche Interpretation der Strukturverteilung ist folgende: Faßt man die Menge aller Versicherungsverträge eines Marktes zusammen, so beschreibt die Strukturverteilung, wie die Versicherung aus dieser Gesamtheit Verträge „zieht“²⁴. Abhängig von Zeichnungs- und Marketingpolitik wird ein Bestand entstehen, bei dem die verschiedenen Risikoparameter θ mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten vorkommen.

Es ist sicher einleuchtend, daß beispielsweise die HUK COBURG als Versicherer des öffentliche Dienstes eine andere Strukturverteilung besitzt als die EUROPA-VERSICHERUNG. Ebenso klar ist, daß π empirisch kaum zu bestimmen ist.

Das Qualitätsmaß²⁵ für $\hat{\theta}$ ist damit

$$\int \mathcal{E}(\hat{\mu} - \mu(\theta))^2 \pi(\theta) d\theta.$$

Wieder werden nur solche $\hat{\mu}$ betrachtet, die linear in den Beobachtungen sind:

$$\hat{\mu} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i$$

Das folgende mathematische Modell ist das sogenannte *einfache Credibility-Modell*:

θ hat die Dichte $\pi(\theta)$. Gegeben θ , sind X_1, \dots, X_n stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit Verteilung P_θ und Erwartungswert $\mu(\theta)$.

In diesem Modell berechnet man Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte folgendermaßen:

²³nicht zu verwechseln mit dem Strukturvertrieb!

²⁴Wie das Ziehen aus einer Urne.

²⁵ $E\theta(\hat{\mu} - \mu(\theta))^2$ ist eine Verlustfunktion. Hohe Werte bedeuten daher schlechte Qualität, weswegen das Minimum angestrebt wird.

$$\bullet \mathcal{P}\{X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n, \theta \in B\} = \int_B \prod_{i=1}^n P_\theta(A_i) \pi(\theta) d\theta$$

$$\bullet \mathcal{E}X_i = \int \mu(\theta) \pi(\theta) d\theta =: m$$

- X_1, \dots, X_n sind *nicht* stochastisch unabhängig : Es gilt für $i \neq j$

$$\begin{aligned} \text{Kov}(X_i, X_j) &= \mathcal{E}(X_i - m)X_j \\ &= \int \mathcal{E}_\theta [(X_i - \mu(\theta))X_j] \pi(\theta) d\theta + \int (\mu(\theta) - m)\mu(\theta)\pi(\theta) d\theta \\ &= \int (\mu(\theta) - m)^2 \pi(\theta) d\theta =: \tau^2. \end{aligned}$$

τ^2 ist die Varianz der Zufallsvariable $\mu(\theta)$.

6.3.1 Credibility-Schätzer

Der lineare Schätzer $\hat{\mu}$ für $\mu(\theta)$, der den Fehler $\mathcal{E}\mathcal{E}_\theta(\hat{\mu} - \mu(\theta))^2$ minimiert, ist

$$\hat{\mu} = z\bar{x} + (1 - z)m, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i X_i,$$

mit $m = \mathcal{E}\mu(\theta)$, $\tau^2 = \text{Var}(\mu(\theta))$, $\sigma^2 = \int \text{Var}(P_\theta)\pi(\theta) d\theta$ und

$$z = \frac{n\tau^2}{n\tau^2 + \sigma^2}.$$

Es gilt $0 < z < 1$. z heißt *Credibility-Faktor*. $\hat{\mu}$ ist eine Kombination aus globalem Mittel m und individueller Beobachtung \bar{x} . σ^2 ist ein Maß für die Fluktuation der Werte in den Verträgen oder Gruppen. τ^2 ist ein Maß für die Fluktuation der mittleren Werte $\mu(\theta)$ zwischen den Verträgen (Gruppen). Ist σ^2 klein, so ist z nahe bei 1 (das heißt es liegt viel Gewicht auf dem individuellen Wert \bar{x}), ist σ^2 groß, so liegt viel Gewicht auf m . Ist n groß, dann liegt viel Gewicht auf \bar{x} .

Credibility-Schätzer sind von besonderer Bedeutung für kleines n , wenn die Datenmenge für eine statistische Analyse zu klein ist. Dies ist der in der Praxis auftretende Fall! Durch Kombination mit dem globalen Wert m wird die statistische Situation verbessert, die Datenmenge „vergrößert“.

Für Anwendungen müssen die Parameter m , σ^2 , τ^2 aus den Daten bestimmt werden (π ist nicht zu ermitteln!). Dazu benötigt man Daten aus anderen Verträgen:

Wie üblich bezeichnen wir mit X_{ij} die Schadenssumme aus dem Jahr i bezüglich des Vertrages j . Mit X_{ij} werden die Parameter folgendermaßen festgelegt:

$$\hat{m} = \frac{1}{k} \frac{1}{n} \sum_{i,j} X_{ij}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - X_{\bullet j})^2$$

$$\hat{\tau}^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^k (X_{\bullet j} - \hat{m})^2 - \frac{1}{n} \hat{\sigma}^2,$$

wobei $X_{\bullet j} := \frac{1}{n} \sum X_{ij}$ bedeutet.

Der Schätzer $\hat{\tau}^2$ braucht den Term $-\frac{1}{n}\hat{\sigma}^2$ für kleines n , um im zugehörigen Modell erwartungstreu zu sein und damit das Richtige zu schätzen.

Beispiel 6.8

(*Hachemeister-Daten*) durchschnittliche Schadenhöhen für die Insassenversicherung in 5 Staaten der USA, vierteljährlich erfaßt²⁶. Es ergaben sich die Werte X_{ij} :

i	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5
1	1738	1364	1759	1223	1456
2	1642	1408	1685	1146	1499
3	1794	1597	1479	1010	1609
4	2051	1444	1763	1257	1741
5	2079	1342	1674	1426	1482
6	2234	1675	2103	1532	1572
7	2032	1470	1502	1953	1606
8	2035	1448	1622	1123	1735
9	2115	1464	1828	1343	1607
10	2262	1831	2155	1243	1573
11	2267	1612	2233	1762	1613
12	2517	1471	2059	1306	1690
$\frac{1}{12} \sum_i X_{ij}$	2064	1511	1822	1360	1599
$\hat{\mu}$	2044	1519	1814	1376	1602

Der Credibility-Faktor z ist unabhängig von j ungefähr $z \approx 0,95$ und die übrigen gerundeten Werte lauten:

$$\begin{aligned} \hat{m} &= 1671 \\ \hat{\theta}^2 &= 46040 \\ \hat{\tau}^2 &= 72310 \end{aligned}$$

Bem.: Zahlreiche Verfeinerungen des Modells sind inzwischen in Anwendung²⁷:

- Bühlmann-Straub,

²⁶Beobachtungszeitraum: Juli 1970 – Juni 1973

²⁷Literatur: [10]

- Hachemeister,
- hierarchische Credibility.

Die Daten lassen vermuten, daß die Varianzen in den Gruppen unterschiedlich sind, was im Bühlmann-Straub-Modell berücksichtigt wird.

Dies ist nur eine kurze Einführung in das Thema, ausführlicher und mit Variationen wird es in Risikotheorie 2 dargestellt.

Anhang A

Übungsaufgaben und Lösungen

A.1 Aufgaben

Aufgabe A.1

Geben Sie für das Risiko „Gesamtschaden eines Jahres einer Police in der Kfz-Haftpflicht-Versicherung“ Einflußfaktoren und Gründe für deren Einfluß sowie Methoden zur Bestimmung der Faktorausprägungen an.

Aufgabe A.2

Geben Sie jeweils ein Beispiel aus der Versicherungswirtschaft, in dem die folgenden Risiken auftreten

- Großschadenrisiko
- Kumulrisiko
- Irrtumsrisiko
- Änderungsrisiko

Aufgabe A.3

Geben Sie zwei Beispiele an, die belegen, daß die Entschädigungssumme zweier Versicherungsverträge *nicht* durch stochastisch unabhängig Zufallsvariable modelliert werden kann.

Aufgabe A.4

Wie beurteilen Sie das Zufallsrisiko in den Zweigen

- Lebensversicherung,
- Hagelversicherung,

- Industrie-Feuerversicherung,
- Kraftfahrzeug-Kaskoversicherung,
- Rückversicherung ?

Geben Sie jeweils eine Begründung.

Aufgabe A.5

Berechnen Sie

- Erwartungswert
- Varianz
- Schiefe
- charakteristische Funktion
- erzeugende Funktion

der Verteilungen

- $b(n, p)$
- $NB(1, p)$

.

Aufgabe A.6

Berechnen Sie folgende Faltungen:

- $U(0, 1) * U(0, 1)$
- $\text{Exp}(\theta_1) * \text{Exp}(\theta_2), \theta_1 \neq \theta_2$
- $\pi(\lambda) * U(0, 1)$

Aufgabe A.7

Berechnen Sie Varianz und Schiefe von

- $\text{Exp}(\theta)$
- $\text{Par}(a)$

- $\text{LN}(\mu, \sigma^2)$

Aufgabe A.8

Berechnen Sie mit Hilfe von Kumulanten Varianz und Schiefe von $\Gamma(k, \theta)$.

Aufgabe A.9

Seien

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\{X_1 = 1000\} &= 1 - \mathcal{P}\{X_1 = 0\} = \frac{1}{1000} \\ \mathcal{P}\{X_2 = 100\} &= 1 - \mathcal{P}\{X_2 = 0\} = \frac{1}{100}\end{aligned}$$

Welches Risiko — X_1 oder X_2 — ist gefährlicher?

Aufgabe A.10

Der Jahresgesamtschaden eines Versicherungsvertrages i sei normalverteilt mit Mittelwert μ_i und Varianz σ_i^2 . Alle Verträge seien stochastisch unabhängig. Wie können Sie sicherstellen, daß Ihr Versicherungsbestand einen Jahresgesamtschaden S mit einer Wahrscheinlichkeit

$$\mathcal{P}\{S > s_0 + \pi\} \leq 0,001$$

hat? Hierbei sei s_0 Ihr Eigenkapital und die Bestandsprämie π habe die Form

$$\pi = \sum_i \mu_i + \sigma_i^2.$$

Welche Verträge sind „gut“? Welche Portefeuille-Zusammensetzung ist „gut“?

Wie ändert sich die Situation, wenn die Prämie die Gestalt

$$\pi = \sum_i \mu_i + \sigma_i$$

oder

$$\pi = \sum_i (\mu_i + \beta \sigma_i), \quad \beta > 0 \text{ fest}$$

annimmt?

Aufgabe A.11

Sei P die Paretoverteilung $\text{Par}^*(1, a)$ mit der Dichte

$$x \mapsto ax^{-(a+1)}, \quad x > 1.$$

Berechnen Sie die Dichte von $P * P$.

Aufgabe A.12

Wieviele Rosinen muß man in 500g Teig tun, damit ein 50g-Brötchen mit Wahrscheinlichkeit 0,99 mindestens eine Rosine enthält?

Aufgabe A.13

Ein Versuch, bei dem ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit p auftritt, wird unabhängig so oft wiederholt, bis das Ereignis eintritt. Welche Verteilung hat die Zahl der Wiederholungen?

Aufgabe A.14

Sei X exponentialverteilt und

$$Y = \begin{cases} X - M_1, & X > M_1 \wedge X \leq M_1 + M_2 \\ M_2 & , X > M_1 + M_2 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie Verteilungsfunktion und Dichte von Y .

Aufgabe A.15

Berechnen Sie für die negative Binomialverteilung mit der Zähldichte

$$\text{NB}(r, p)\{k\} = \binom{r+k-1}{k} (1-p)^r p^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

die erzeugende Funktion und die Varianz¹.

Aufgabe A.16

Berechnen Sie für die Log-Normalverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2}, \quad x > 0$$

die Momente der Ordnung $k = 1, 2, 3, \dots$. Berechnen Sie ferner die zugehörige Verteilungsfunktion.

Hinweis: $N(0, 1)$ hat die MEF $t \mapsto e^{\frac{t^2}{2}}$

Aufgabe A.17

Seien X_1, \dots, X_n stochastisch unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen, die positiv sind. Zeigen Sie: Dann gilt

$$\mathcal{E} \frac{X_1}{X_1 + \dots + X_n} = \frac{1}{n}.$$

¹Hinweis: In der Übersicht ist die Rolle von p und $1-p$ vertauscht.

Aufgabe A.18

(1. Programmieraufgabe) Berechnen Sie die Gesamtschadenverteilung für den Beispielbestand aus Beispiel 3.1 mit dem Zusatz: Bei Tod durch Unfall verdoppelt sich die Risikosumme. Die Wahrscheinlichkeit für „Tod durch Unfall“ sei das 0,2-fache der Wahrscheinlichkeit für den Tod.

Anleitung: Für Vertrag 1 mit Risikosumme 2000 und Sterbewahrscheinlichkeit 0,000505 gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\{X_1 = 0\} &= 1 - 0,000505 \\ \mathcal{P}\{X_1 = 2000\} &= 0,8 \cdot 0,000505 \\ \mathcal{P}\{X_1 = 4000\} &= 0,2 \cdot 0,000505\end{aligned}$$

Angegeben werden sollen die Werte $\mathcal{P}\{S = k \cdot 1000\}$ und $\mathcal{P}\{S \leq k \cdot 1000\}$ für $k = 0, \dots, 20$ sowie $\mathcal{E}S$, $\text{Var}(S)$, $\mathcal{E}(S - \mathcal{E}S)^3$ und die Schiefe von S .

Aufgabe A.19

Berechnen Sie die Zähldichte $p(k)$ der folgenden Poisson'schen Summenverteilungen für $k = 0, \dots, n$:

- $\lambda = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$, $Q\{i\} = \frac{1}{\lambda i}$, $i = 1, \dots, n$
- $\lambda > 0$, $Q\{i\} = \frac{1}{n}$, $i = 1, \dots, n$, $n = 5$ und $n = 6$.

Aufgabe A.20

Wie verändern sich die Bausteine R und Q einer Summenverteilung bei Einführung von

- einem Selbstbehalt bzw. einer Selbstbeteiligung,
- einer Haftungsgrenze?

Aufgabe A.21

Wie verändern sich in Aufgabe A.20 konkret

- R , wenn $R = \pi(\lambda)$ bzw. $R = \text{NB}(1, p)$
- Q , wenn $Q = \text{Exp}(\theta)$ bzw. $Q = \text{Par}^*(1, a)$

Aufgabe A.22

Berechnen Sie die erzeugende Funktion der logarithmischen Verteilung.

Hinweis: Es gilt

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}$$

Aufgabe A.23

Berechnen Sie die Poisson'sche Summenverteilung, welche die logarithmische Verteilung als SHV hat.

Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe [A.22](#).

Aufgabe A.24

Welches sind die Parameter a, b in der Rekursion

$$p_{n+1} = \left(a + \frac{b}{n+1} \right) p_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

für die Zähldichte p_n der

- Poissonverteilung,
- Binomialverteilung,
- Negativ-Binomialverteilung?

Aufgabe A.25

Welche Vereinfachungen ergeben sich bei der PSV-Approximation, wenn bei den individuellen Verteilungen

$$P_i = (1-p)\delta_0 + p_i Q_i$$

- $\forall i : Q_i = Q$
- $\forall i : p_i = p$

gilt?

Aufgabe A.26

Welche Verteilung ist die Summenverteilung mit SHV $\text{Exp}(\theta)$ und SZV-Zähldichte

$$p_n = p^{n-1}(1-p), \quad n = 1, 2, \dots?$$

Aufgabe A.27

Die Weibull-Verteilung Q mit Parametern $a, b > 0$ hat die Dichte

$$f(x) = abx^{b-1}e^{-ax^b}, \quad x > 0.$$

Sei $X \sim Q$. Für welche $a, b > 0$ gilt

$$\mathcal{E}e^{tX} < \infty$$

für alle $t > 0$?

Aufgabe A.28

(2. Programmieraufgabe) Berechnen Sie mit Hilfe der Panjer-Rekursion die PSV-Approximation für den Beispiel-Risiko-Lebensbestand mit Unfallzusatzversicherung. Berechnen Sie für diese Approximation

- die Zähldichte in $0, 1, \dots, 20$,
- Varianz und Erwartungswert,
- die Größe des Approximationsfehlers aus der Fehlerabschätzung.

Aufgabe A.29

Seien Z_1, Z_2, \dots stochastisch unabhängig mit $\mathcal{P}\{Z_i = 1\} = 1 - \mathcal{P}\{Z_i = -1\} = p$. Berechnen Sie für $s = 0, 1, \dots$

$$\Psi(s) = \mathcal{P}\{Z_1 + \dots + Z_n > s \text{ für mindestens ein } n\}$$

Anleitung: Der interessante Fall ist $p < \frac{1}{2}$. Benutzen Sie die Faltungsformel

$$\Psi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-q)q^k \mathbb{H}^{*k}(s, \infty)$$

mit $q = \Psi(0)$ und der Leiterhöhenverteilung \mathbb{H}

$$\mathbb{H}(A) = \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}\{Z_1 + \dots + Z_{l-1} \leq 0, \quad l = 2, \dots, n, \quad 0 < Z_1 + \dots + Z_n \in A\}.$$

Hier läßt sich \mathbb{H} berechnen! Zur Bestimmung von q verwendet man die Relation

$$\Psi(s) = (1-p)\Psi(s+1) + p\Psi(s-1). \quad (\text{A.1})$$

Warum gilt (A.1)?

Aufgabe A.30

Das Management toleriert eine Ruinwahrscheinlichkeit von 0,00001. Bei SHV $\text{Exp}(\theta)$ und SZV $\pi(\lambda)$ mit $\lambda = 100$ und $\theta = \frac{1}{1000}$ ist

1. bei gegebener Bestandsprämie 110000 die freie Reserve s
2. bei gegebener freier Reserve 100000 die Bestandsprämie π zu bestimmen. Man benutze den Anpassungskoeffizienten.

Aufgabe A.31

Sei R der Anpassungskoeffizient für die Gesamtschadenverteilung $PSV(\lambda, Q)$ und die Prämie π . Für $r > 0$ hat man errechnet, daß

$$\lambda + r\pi > \lambda \mathcal{E}e^{rZ}$$

mit $Z \sim Q$. Gilt dann $R > r$ oder $R < r$?

Aufgabe A.32

Sei R der Anpassungskoeffizient für die Gesamtschadenverteilung $PSV(\lambda, Q)$ und die Prämie π . Für $c > 0$ sei R_c der Anpassungskoeffizient für die Gesamtschadenverteilung $PSV(\lambda c, Q)$ und die Prämie πc . Dann gilt

$$R_c = R.$$

Interpretieren Sie dies.

Aufgabe A.33

(*Rechenaufgabe*) Sei P eine Verteilung mit MEF $M(r)$, und Q sei die Verteilung mit der Dichte

$$\frac{1}{\mu} P(x, \infty), \quad x > 0$$

(mit $\mu = \text{Erwartungswert von } P$). Dann ist Q wirklich eine Verteilung mit MEF

$$r \mapsto \frac{1}{\mu} \frac{M(r) - 1}{r}, \quad r > 0.$$

Anleitung: Man benutze $\mathcal{E}X = \int_0^\infty \mathcal{P}\{X > t\} dt$ für $X \geq 0$.

Aufgabe A.34

Gegeben seien die Daten (Schadenzahlungen)

1.2 1.5 2.7 3 3.2 3.5 4 6.3 7 9.5

Berechnen Sie für die zugehörige empirische Verteilung die Prämie des entsprechenden Risikos nach dem

- Erwartungswertprinzip,
- Standardabweichungsprinzip,
- Exponentialprinzip.

Aufgabe A.35

Berechnen Sie den Anpassungskoeffizienten der empirischen Verteilung aus Aufgabe A.34 mit der Prämie 50.

Hinweis: Dies geht nur numerisch!

Aufgabe A.36

Das Management toleriert eine Ruinwahrscheinlichkeit von 0,00001 und stellt eine freie Reserve in Höhe von 110000. Welchen Sicherheitszuschlag sollte man wählen, wenn die Prämie nach dem Varianzprinzip berechnet werden soll?

Aufgabe A.37

Die Leiterhöhenverteilung im stetigen Modell mit SHV Q hat die Dichte (mit $\mu = \text{Erwartungswert von } Q$)

$$\frac{1}{\mu} Q(x, \infty), \quad x > 0.$$

Berechnen Sie diese Leiterhöhenverteilung für $Q = \text{Exp}(\theta)$.

Aufgabe A.38

Berechnen Sie den Variationskoeffizient der $\text{PSV}(\lambda, Q)$. Was geschieht für $\lambda \rightarrow \infty$ und was bedeutet dies?

Aufgabe A.39

Ein Reißnagel, welcher auf eine Tischplatte fällt, bleibt mit der Spitze nach oben oder in Schräglage, mit der Spitze nach unten, liegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Reißnagel mit der Spitze nach oben liegenbleibt?

Anleitung: Alles ist erlaubt: Nachdenken, Raten, Rechnen, Sicherinnern, Erfahrung sammeln,...

Aufgabe A.40

Wie wirkt sich die Fahrleistung (Zahl der pro Jahr gefahrene Kilometer) auf die Anzahl der Schadenfälle in der Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung aus? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe A.41

Geben Sie je ein Beispiel aus der Versicherungswirtschaft, in dem das folgende Risiko auftritt:

a) Großschadenrisiko, b) Kumulrisiko, c) Irrtumsrisiko, d) Änderungsrisiko.

Aufgabe A.42

Geben Sie Beispiele aus der Versicherungspraxis an, bei denen Prämienhöhe und Entschädigungen einander beeinflussen.

Aufgabe A.43

Geben Sie Beispiele an, bei denen die Entschädigung aus einem Versicherungsvertrag von der tatsächlichen Schadenhöhe abweichen kann.

Aufgabe A.44

Bei einem (fiktiven) Versicherungsvertrag tritt im versicherten Zeitraum höchstens ein Schaden ein; dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit 0,1. Die Höhe eines Schadens ist exponentialverteilt mit Mittelwert 100. Wird die Versicherung nicht in Anspruch genommen, so erhält der Versicherungsnehmer 50% der Prämie zurückerstattet. Berechnen Sie die Erwartungswerte der Einnahmen und Ausgaben des Versicherungsunternehmens aus diesem einen Vertrag, wenn die Prämie 20 DM beträgt.

Aufgabe A.45

In welchen Bereichen kann man Diversifikationseffekte ausnutzen?

Aufgabe A.46

a) Berechnen Sie die Faltung P von P_1, P_2, P_3 , wobei

$$P_1\{1\} = 1 - P_1\{0\} = 1/4,$$

$$P_2\{1\} = P_2\{2\} = P_2\{3\} = 1/3, \text{ und}$$

$$P_3\{0\} = 0.8, P_3\{1\} = P_3\{2\} = 0.1.$$

Bestimmen Sie $P[2, \infty)$.

Aufgabe A.47

b) Berechnen Sie die Dichte der Faltung von $\text{Exp}(1)$ und $\text{Par}(1)$.

Dichten: $x \rightarrow e^{-x}, x > 0$, und $x \rightarrow x^{-2}, x > 1$.

Aufgabe A.48

Sei $Q\{1\} = Q\{2\} = Q\{3\} = Q\{4\} = 1/4$. Berechnen Sie $PSV(\lambda, Q)\{k\}$ für $k = 1, 2, 3$.

Aufgabe A.49

Berechnen Sie die Schiefe einer PSV.

Aufgabe A.50

Berechnen Sie die charakteristische Funktion einer Summenverteilung mit Schadenzahl geometrisch und Schadenhöhe exponentialverteilt.

Aufgabe A.51

Geben Sie Beispiele an, bei denen der Gesamtschaden a) pro Vertrag bzw. b) pro Ereignis mit einer Summenverteilung modelliert werden kann.

Aufgabe A.52

Berechnen Sie den Anpassungskoeffizienten für die Gesamtschadenverteilung $PSV(\lambda, Q)$ mit $Q = \text{Exp}(\theta)$. Welche Bedingung muß die Prämie π erfüllen, damit dies möglich ist?

Aufgabe A.53

Sei X lognormalverteilt mit Prämie $\pi > \mathcal{E}X$. Welchen Anpassungskoeffizient hat das Problem (X, π) ?

Aufgabe A.54

Sei N Poissonverteilt, X_1, X_2, \dots identisch verteilt und N, X_1, X_2, \dots seien stochastisch unabhängig. Ist dann

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{falls } X_i \leq M \\ X_i - M, & \text{sonst} \end{cases},$$

so hat $S = Y_1 + \dots + Y_N$ eine PSV. Schreiben Sie diese als $PSV(\lambda, Q)$ mit $Q(0, \infty) = 1$.

Aufgabe A.55

Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten der Tailwahrscheinlichkeit $Q(x, \infty)$ für folgende Verteilungen Q : a) Loggammaverteilung, b) Gammaverteilung, und c) Weibullverteilung. Ist $h(x)$ die Dichte der zugehörigen Leiterhöhenverteilung,

$$h(x) = \frac{1}{\mu} Q(x, \infty),$$

welches Verhalten hat dann die Tailwahrscheinlichkeit

$$\int_x^\infty h(y) dy?$$

[Anleitung: Berechnen Sie die Ableitung der Dichte von Q und untersuchen Sie die Größe der entstehenden Terme.]

A.2 Lösungen

Lösung der Aufgabe 1

Regionalklasse Unterschiedliche Verkehrsdichten und evtl. unterschiedliche Mentalität in verschiedenen Gebieten (Ballungszentren vs. plattes Land)

Stärke Fahrzeuge mit mehr kW sind kräftiger, i.d.R. auch größer und können somit mehr Schaden anrichten

öffentlicher Dienst Es läßt sich zeigen, daß Angehörige des öffentlichen Dienstes signifikant weniger Schäden haben als normale Menschen. Ob das daran liegt, daß sie sich tagsüber im Büro ausschlafen können, ist jedoch noch unbewiesen.

Schadenfreiheit Wer seit x Jahren ohne Schaden gefahren ist, läßt vermuten, daß dies um so wahrscheinlicher so bleibt, je größer x ist.

Kilometerleistung Fahrer mit sehr geringer Jahres-km-Leistung (sog. Sonntagsfahrer) tun instinktiv das falsche. Ab einem gewissen Punkt steigt das Risiko jedoch im wesentlichen linear mit den gefahrenen Kilometern (Wer öfter fährt hat öfter die Chance zum Schaden).

Alter Führerscheinneulinge fahren häufig noch nicht gut. Nichtsdestotrotz trauen Sie sich schon nach kurzer Zeit wesentlich mehr zu, ohne deswegen deutlich besser zu fahren. Und so ist es nur eine Frage der Zeit . . .

Im Alter lassen Reaktionsvermögen, Sehkraft, Gehör, etc. nach, sodaß das Risiko wieder steigt.

Geschlecht Frauen sind hübscher und fahren besser.

Temperament Der Grund liegt auf der Hand, nur messen läßt sich das schlecht.

Alter des Autos Je neuer ein Fahrzeug ist, desto eher wird sein Eigentümer bemüht sein, daß ihm auch ja nichts passiert. Somit fährt er vielleicht ein wenig vorsichtiger.

Fahrzeug-Gattung Sportwagen, Familienkutsche, Cabrio, . . .

Ebenso einzelne Typen: Porsche, Golf GTI, Opel Manta, . . .

Sitzplätze Je mehr Personen in einem Fahrzeug sitzen, desto mehr können gegebenenfalls Ansprüche gegen den schadenverursachenden Fahrer stellen.

Lösung der Aufgabe 2

Großschaden IndustrieV, LuftfahrtV, AtomSchdV

Kumul HagelV, ÜberschwemmungsSchdV, SturmV

Irrtum von Beginn an nicht risikogerechte
Tarifierungsmerkmale, Tarifierung

Änderung SturmV, allg. Risikostrukturänderung während der Laufzeit

Lösung der Aufgabe 3

KH/KF Bei den meisten selbstverschuldeten Unfällen ist sowohl das eigene Fahrzeug als auch Eigentum Dritter beschädigt. Und ist man nicht schuld, dann kommen häufig dennoch Teilungsabkommen der VU untereinander zum Tragen.

Hagel Kumulrisiko

Lösung der Aufgabe 4

Leben Zumindest im Bereich der kapitalbildenden LV ist das Risiko sehr gering. Da es in den Industrieländer derzeit keine Seuchen gibt, die Massen dahinraffen, kommen Großschäden sehr selten vor (nur im Zusammenhang mit Naturkatastrophen und Schiffs-, Zug- oder Flugzeugunglücken).

Hagel Wenn es hagelt, dann richtig. Großschäden sind hier relativ häufig (München ...). Hohes Z.-Risiko.

Ind.-Feuer Das Zufallsrisiko ist relativ hoch, da hier die einzelne Vertragssumme relativ hoch, die Anzahl der Risiken jedoch eher gering ist.

KF Das Zufallsrisiko liegt wohl im mittleren Bereich. Einerseits ist der Bestand groß und leidlich homogen. Andererseits ist in der KF Hagelschaden mitversichert (s.o.).

Rückversicherung Im Falle der SchadenexzedentenV extrem hoch (Einzelschadenexz., JahresüberschadenV), denn hier kommen fast nur Groß- und Kumulschäden zum Tragen. Bei der SummenexzedentenV in etwa so hoch wie beim Zedent (vielleicht auch ein wenig darüber, da die Höhe der übernommenen Summe wohl recht groß und die Zahl der Risiken eher klein ist). Im Fall der QuotenRV ist das Risiko sogar geringer als beim Zedenten, da hier die Risikozahl den Ausgleich im Kollektiv besser möglich macht und der einzelne Vertragsanteil i.d.R. recht gering ist.

Lösung der Aufgabe 5

- Zunächst die Verteilung $b(n, p)$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}X &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{wegen } \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{k}{n} \\
 &= np \sum_{k=0}^n -1 \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} = np
 \end{aligned}$$

Ebenso berechnet man

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}X(X-1) &= n(n-1)p^2 \\
 \mathcal{E}X(X-1)(X-2) &= n(n-1)(n-2)p^3
 \end{aligned}$$

Daraus leitet man ab:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= \mathcal{E}X(X-1) + \mathcal{E}X - (\mathcal{E}X)^2 \\
 &= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) \\
 \text{Schiefe}(X) &= \mathcal{E}(X - \mathcal{E}X)^3 \\
 &= \mathcal{E}X^3 - 3\mathcal{E}X^2\mathcal{E}X + 2(\mathcal{E}X)^3 \\
 &= \mathcal{E}X(X-1)(X-2) - 2\mathcal{E}X + 3\mathcal{E}X^2 - 3\mathcal{E}X^2\mathcal{E}X + 2(\mathcal{E}X)^3 \\
 &= n(n-1)(n-2)p^3 - 2np + 3np(1-p) + 3n^2p^2 \\
 &\quad - 3n^2p^2(1-p) - 3n^3p^3 + 2n^3p^3 \\
 &= n^3p^3 - 3n^2p^3 + 2np^3 + np - 3np^2 + 3n^2p^3 + n^3p^3 \\
 &= np(1-3p+2p^2) = np(1-p)(1-2p) \\
 \text{CF}(t) &= \sum_{k=0}^n e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^{it})^k (1-p)^{n-k} \\
 &= (1-p + pe^{it})^n. \\
 \text{EF}(z) &= (1-p + pz)^n \quad \text{genau wie bei CF}(t)
 \end{aligned}$$

Die erzeugende Funktion ist definiert für alle komplexen z .

- Als zweites die Verteilung $\text{NB}(1, p)$:

Die Zähldichte lautet

$$p(k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Erwartungswert: $\text{NB}(2, p)$ hat die Zähldichte

$$p_2(k) = (k+1)p^2(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)p(1-p)^k = \frac{1}{p} = \mathcal{E}X + 1$$

oder

$$\mathcal{E}X = \frac{1-p}{p}.$$

Varianz: $\text{NB}(3, p)$ hat die Zähldichte

$$p_3(k) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)p^3(1-p)^k$$

und daher gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)p(1-p)^k = \frac{2}{p^2}.$$

Damit erhält man wegen

$$\text{Var}(X) = \mathcal{E}X^2 - (\mathcal{E}X)^2$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathcal{E}(X+1)(X+2) - 3\mathcal{E}X - 2 - (\mathcal{E}X)^2 \\ &= \frac{2}{p^2} - 3\frac{1-p}{p} - 2 - \frac{(1-p)^2}{p^2} \\ &= \frac{1-p}{p^2}. \end{aligned}$$

Schiefe: Es gilt

$$\mathcal{E}(X - \mathcal{E}X)^3 = \mathcal{E}X^3 - 3\mathcal{E}X^2\mathcal{E}X + 2(\mathcal{E}X)^3.$$

Wie oben erhält man

$$\mathcal{E}(X+1)(X+2)(X+3) = \frac{6}{p^3}$$

und damit

$$\mathcal{E}X^3 = \frac{6}{p^3} - 6\mathcal{E}X^2 - 11\mathcal{E}X - 6.$$

Schließlich ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X - \mathcal{E}X)^3 &= \frac{6}{p^3} - 6\mathcal{E}X^2 - 11\mathcal{E}X - 6 - 3\mathcal{E}X^2\mathcal{E}X + 2(\mathcal{E}X)^3 \\ &= \frac{6}{p^3} - 6\frac{1-p}{p^2} - 6\frac{(1-p)^2}{p^2} - 11\frac{1-p}{p} \\ &\quad - 6 - 3\frac{(1-p)^2}{p^3} - \frac{(1-p)^3}{p^3} \\ &= \frac{1}{p} - \frac{3}{p^2} + \frac{2}{p^3} \\ &= \frac{1}{p^3}(1-p)(2-p) \end{aligned}$$

Die Schiefe ist also immer positiv.

charakteristische Funktion:

$$\text{CF}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} p(1-p)^k = p \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)e^{it})^k = \frac{p}{1 - (1-p)e^{it}}$$

erzeugende Funktion: Genau wie bei der charakteristischen Funktion berechnet man

$$\text{EF}(z) = \frac{p}{1 - (1-p)z}.$$

Die erzeugende Funktion existiert für $|z| < \frac{1}{1-p}$.

Lösung der Aufgabe 6

- $U(0, 1) * U(0, 1)$ wird mit der Faltungsformel für Dichten berechnet: Ist f die Dichte von $U(0, 1)$, so hat $U(0, 1) * U(0, 1)$ die Dichte

$$g(x) = \int f(x-y)f(y) dy.$$

Damit wird $g(x) = 0$ für $x < 0$ und $x > 2$ und weiter

$$g(x) = \begin{cases} \int_0^x dy = x & , x \leq 1 \\ \int_{x-1}^1 dy = 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

- Ist $f_i(x)$ die Dichte von $\text{Exp}(\theta_i)$, $i = 1, 2$, so hat $\text{Exp}(\theta_1) * \text{Exp}(\theta_2)$ die Dichte

$$\begin{aligned} g(x) &= \int f_1(x-y)f_2(y) dy \\ &= \int_0^x \theta_1 e^{-\theta_1(x-y)} \theta_2 e^{-\theta_2 y} dy \\ &= \theta_1 \theta_2 e^{-\theta_1 x} \int_0^x e^{(\theta_1 - \theta_2)y} dy \\ &= \theta_1 \theta_2 e^{-\theta_1 x} \frac{1}{\theta_1 - \theta_2} [e^{(\theta_1 - \theta_2)y}]_0^x \\ &= \frac{\theta_1 \theta_2}{\theta_1 - \theta_2} (e^{-\theta_2 x} - e^{-\theta_1 x}), \quad x > 0 \end{aligned}$$

- $\pi(\lambda) * U(0, 1)$ ist die Verteilung von $X+Y$ mit X, Y stochastisch unabhängig, $X \sim \pi(\lambda)$, $Y \sim U(0, 1)$. Ist $A \subset [k, k+1)$, so gilt

$$\mathcal{P}\{X+Y \in A\} = \mathcal{P}\{X = k \text{ und } Y \in A - k\}.$$

Hierbei ist $A - k = \{a - k : a \in A\}$ die um k nach links verschobene Menge A . Somit hat $\pi(\lambda) * U(0, 1)$ eine Dichte $g(x)$ der Form

$$g(x) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \leq x < k+1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Lösung der Aufgabe 7

- Die Momente von $\text{Exp}(\theta)$ ergeben sich wegen der Definition der Gamma-Funktion

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx$$

zu

$$\mathcal{E}X^n = \int_0^\infty x^n \theta e^{-\theta x} dx = \theta^{-n} \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \theta^{-n} \Gamma(n+1) = \theta^{-n} n!$$

und damit ist

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mathcal{E}X^2 - (\mathcal{E}X)^2 = \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2} \\ \text{Schiefe}(X) &= \mathcal{E}X^3 - 3\mathcal{E}X^2\mathcal{E}X + 2(\mathcal{E}X)^3 = \frac{1}{\theta^3}(6 - 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2) = \frac{2}{\theta^3}.\end{aligned}$$

- Die Momente der Pareto-Verteilung mit Dichte

$$f(x) = ax^{-(a+1)}, \quad x > 1$$

ergeben sich, sofern sie existieren, als

$$\mathcal{E}X^n = \int_1^\infty x^n ax^{-(a+1)} dx = \frac{a}{a-n}.$$

Die Existenz ist für $n < a$ gesichert. Für die Existenz der Varianz muß $a > 2$ gelten, und dann ist

$$\text{Var}(X) = \frac{a}{a-2} - \frac{a^2}{(a-1)^2} = \frac{a}{(a-2)(a-1)^2}.$$

Für die Schiefe benötigt man $a > 3$, und dann ist

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(X - \mathcal{E}X)^3 &= \mathcal{E}X^3 - 3\mathcal{E}X^2\mathcal{E}X + 2(\mathcal{E}X)^3 \\ &= \frac{a}{a-3} - 3\frac{a}{a-2}\frac{a}{a-1} + 2\frac{a^3}{(a-1)^3} \\ &= \frac{2a+2}{(a-1)^3(a-2)(a-3)}.\end{aligned}$$

Die Schiefe ist hier immer positiv (rechts-schief).

- Ist $Z \sim N(0, 1)$, so ist $Y = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ und

$$X = e^Y \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2).$$

Somit gilt

$$\mathcal{E}X^n = \mathcal{E}e^{nY} = \mathcal{E}e^{n\mu+n\sigma Z}.$$

Aus der Formel für die MEF von $N(0, 1)$

$$\mathcal{E}e^{tZ} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

ergibt sich

$$\mathcal{E}X^n = e^{n\mu} e^{\frac{n^2\sigma^2}{2}}.$$

Die Varianz ergibt sich zu

$$\text{Var}(X) = \mathcal{E}X^2 - (\mathcal{E}X)^2 = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} = e^{2\mu+\sigma^2}(e^\sigma - 1).$$

Für die Schiefe erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(X - \mathcal{E}X)^3 &= \mathcal{E}X^3 - 3\mathcal{E}X^2\mathcal{E}X + 2(\mathcal{E}X)^3 \\ &= e^{3\mu+9\frac{\sigma^2}{2}} - 3e^{2\mu+2\sigma^2} e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} + 2e^{3\mu+3\frac{\sigma^2}{2}} \\ &= e^{3\mu+3\frac{\sigma^2}{2}} \left(e^{3\sigma^2} - 3e^{\sigma^2} + 2 \right).\end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe 8

Varianz und Schiefe sind die zweite bzw. dritte Kumulante, also

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{i^2} \frac{d^2}{dt^2} \ln \mathcal{E} e^{itX} \Big|_{t=0}$$

und

$$\mathcal{E}(X - \mathcal{E}X)^3 = \frac{1}{i^3} \frac{d^3}{dt^3} \ln \mathcal{E} e^{itX} \Big|_{t=0}$$

Für $X \sim \Gamma(k, \theta)$ gilt

$$\text{CF}(t) = \mathcal{E} e^{itX} = \left(\frac{\theta}{\theta - it} \right)^k$$

Somit ergibt sich die Varianz und Schiefe von $\Gamma(k, \theta)$ als das k -fache der Varianz und Schiefe von $\Gamma(1, \theta) = \text{Exp}(\theta)$. Das Resultat ergibt sich nun mit Aufgabe 7:

$$\text{Var}(X) = \frac{k}{\sigma^2}$$

und

$$\text{Schiefe}(X) = \frac{2k}{\sigma^3}$$

Lösung der Aufgabe 9

Es gilt $\mathcal{E}X_1 = \mathcal{E}X_2 = 1$, jedoch

$$\text{Var}(X_1) = (1000)^2 \frac{1}{1000} \left(1 - \frac{1}{1000} \right) = 999$$

$$\text{Var}(X_2) = (100)^2 \frac{1}{100} \left(1 - \frac{1}{100} \right) = 99$$

Gemessen an der Varianz, welche die Schwankung der Zufallsvariable um ihren Mittelwert mißt, ist X_1 „gefährlicher“ als X_2 .

Lösung der Aufgabe 10

Seien $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ stochastisch unabhängig und sei deren Summe $S = \sum_i X_i \sim N(\sum_i \mu_i, \sum_i \sigma_i^2)$. Dann ist

$$\mathcal{P}(\{S > s_0 + \pi\} \leq 0,001) \Leftrightarrow \mathcal{P}\{S \leq s_0 + \pi\} > 0,999 \Leftrightarrow \frac{s_0 + \pi - \sum_i \mu_i}{\sqrt{\sum_i \sigma_i^2}} \stackrel{\text{Tafel}}{\geq} 3,090$$

und wir erhalten als Bedingung für s_0

$$s_0 \geq 3,090 \sqrt{\sum_i \sigma_i^2} - \pi + \sum_i \mu_i.$$

Die im folgenden berechneten unteren Grenzen für das Eigenkapital können durch Risikoabgabe auf dem Mit- oder Rückversicherungswege gedrückt werden.

- $\pi = \sum_i (\mu_i + \sigma_i^2)$

Varianzprinzip

Hier lautet die Bedingung für s_0 :

$$s_0 \geq 3,090 \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2} - \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2} \left[3,090 - \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2} \right]$$

Die Situation wird für den Versicherer vorteilhaft, wenn $\sum \sigma_i^2$ groß wird. Dazu tragen Verträge mit großem σ bei, oder ein Wachstum des Portefeuilles (Vergrößerung von n).

Dieses merkwürdige Ergebnis kommt zustande, weil die Prämie sehr hoch ist.

- $\pi = \sum_i (\mu_i + \sigma_i)$

Standardabweichungsprinzip

Hier lautet die Bedingung für s_0 :

$$s_0 \geq 3,090 \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2} - \sum_{i=1}^n \sigma_i.$$

Ob nun Verträge mit großem oder kleinem σ_i für den Versicherer vorteilhaft sind, hängt stark von der Zusammensetzung des Bestandes ab. Die Bedingung lautet, etwas umgeformt

$$s_0 \geq \sqrt{\sum \sigma_i^2} \cdot \left[3,090 - \sum \frac{\sigma_i}{\sqrt{\sum \sigma_i^2}} \right]$$

und die Klammer [...] wird minimal für homogene Bestände (alle σ 's gleich).

- $\pi = \sum_i (\mu_i + \beta \mu_i)$

Erwartungswertprinzip

Die Bedingung für s_0 lautet nun

$$s_0 \geq 3,090 \sqrt{\sum \sigma_i^2} - \beta \sum_i \mu_i.$$

Die Situation des Versicherers verbessert sich nun, wenn

$$\frac{\sum \mu_i}{\sqrt{\sum \sigma_i^2}} \tag{A.2}$$

wächst. Im homogenen Bestand (μ 's und σ 's unabhängig von n) wächst (A.2) mit n .

Wenn man bei gegebenem Bestand einen Vertrag i durch einen anderen Vertrag mit demselben μ_i , aber mit einem kleineren σ_i^2 ersetzt, so wächst (A.2). Verträge mit kleinem Variationskoeffizienten sind demnach „gut“.

Lösung der Aufgabe 11

Diese Aufgabe, die keine analytische Lösung hat, sollte zeigen, wie schwierig die Operation „Faltung“ ist. Die Faltungsformel liefert als Dichte $g(x)$ von $P * P$ die Gleichung

$$g(x) = \int_1^x f(x-y)f(y) dy, \quad x > 1$$

mit

$$f(x) = ax^{-(a+1)}, \quad x > 1.$$

Explizit ergibt sich also

$$\begin{aligned} g(x) &= a^2 \int_1^x (x-y)^{-(a+1)} y^{-(a+1)} dy \\ &= a^2 x^{-2(a+1)} \int_1^x \left(1 - \frac{y}{x}\right)^{-(a+1)} \left(\frac{y}{x}\right)^{-(a+1)} dy \\ &\stackrel{\text{Subst. } \frac{y}{x}=u}{=} a^2 x^{-2a-1} \int_{\frac{1}{x}}^1 (1-u)^{-(a+1)} u^{-(a+1)} du \end{aligned}$$

Das letzte Integral ist die unvollständige Beta-Funktion, die analytisch nicht geschlossen darstellbar ist, sondern nur in tabellarischer Form angegeben werden kann.

Lösung der Aufgabe 12

Sei

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls die } i\text{-te Rosine im Test-Brötchen enthalten ist,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ferner gelte $\forall i = 1, \dots, 10$: $\mathcal{P}\{X_i = 1\} = \frac{1}{10} =: p$
 $\mathcal{P}\{X_i = 0\} = \frac{9}{10} =: q$

Der Aufgabe werden sowohl die Binomialverteilung als auch die negative Binomialverteilung gerecht:

- Sei $X = \sum_i X_i$ die Anzahl der Rosinen im Test-Brötchen.
 $X \sim b(n, p)$, wobei p gegeben und n gesucht ist.

$$\mathcal{P}\{X \geq 1\} = 1 - \mathcal{P}\{X = 0\} = 1 - \binom{n}{0} p^0 q^n = 1 - q^n \stackrel{!}{\geq} 0,99$$

Und mit der Äquivalenzkette

$$0,01 \geq q^n \Leftrightarrow 0,01 \geq e^{n \ln q} \Leftrightarrow \ln 0,01 \geq \underbrace{n \ln q}_{\leq 0} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,90} \approx 43,7$$

ergibt sich

$$n \geq 44$$

als die notwendige Bedingung.

- Sei Y die Anzahl der Rosinen, die im Teig verteilt werden, bevor die erste Rosine ins Test-Brötchen gelangt.

$$Y \sim \text{NBin}(1, \frac{1}{10})$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß spätestens die k -te Rosine ins Testbrötchen gelangt, ist dann

$$\mathcal{P}\{Y \leq k-1\} = \sum_{i=0}^{k-1} pq^i = p \frac{1-q^k}{1-q} = 1 - q^k \dots$$

Die Auflösung nach k bietet nichts neues.

Lösung der Aufgabe 13

$$X \sim \text{geo}(p) \text{ oder } X = Y + 1 \text{ mit } Y \sim \text{NB}(1, p).$$

Lösung der Aufgabe 14

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathcal{P}\{Y \leq y\} \\ &= \begin{cases} 0 & , y < 0 \\ \mathcal{P}\{X \leq M_1\} = 1 - e^{-aM_1} & , y = 0 \\ \mathcal{P}\{Y = 0\} + \mathcal{P}\{0 < Y \leq y\} = \mathcal{P}\{Y = 0\} + \mathcal{P}\{0 < X - M_1 \leq y\}, \\ = F_X(M_1) + F_X(M_1 + y) - F_X(M_1) = F_X(M_1 + y) = 1 - e^{-aM_1} & , 0 < y < M_2 \\ 1 & , y \geq M_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , y < 0 \\ 1 - e^{-a(M_1+y)} & , 0 \leq y < M_2 \\ 1 & , M_2 \leq y \end{cases} \\ f_Y(y) &= \begin{cases} 0 & , y < 0 \\ 1 - e^{-aM_1} & , y = 0 \\ ae^{-a(M_1+y)} & , 0 < y < M_2 \\ 1 - (1 - e^{-a(M_1+M_2)}) = e^{-a(M_1+M_2)} & , y = M_2 \\ 0 & , y > M_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Zur Kontrolle der „Dichte“ kann man deren charakterisierende Eigenschaft ($\sum f = 1$ bzw. $\int f = 1$) nachprüfen, wobei man die diskreten Teile als Zähldichte, die stetigen als Dichte behandelt:

$$\begin{aligned} 1 - e^{-aM_1} + e^{-a(M_1+M_2)} + \int_{(0, M_2)} ae^{-a(M_1+y)} dy &= \\ 1 - e^{-aM_1} + e^{-a(M_1+M_2)} + [-e^{-a(M_1+y)}]_0^{M_2} &= \\ 1 - e^{-aM_1} + e^{-a(M_1+M_2)} - e^{-a(M_1+M_2)} + e^{-aM_1} &= 1 \end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe 15

erzeugende Funktion:

$$\begin{aligned}
 \text{EF}_{\text{NB}(r,p)}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} (1-p)^r p^k z^k \\
 &= (1-p)^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} (pz)^k \\
 &= (1-p)^r (1-pz)^{-r} \\
 &= \left(\frac{1-p}{1-pz} \right)^r,
 \end{aligned}$$

wobei die Hauptarbeit mal wieder das Auffinden des richtigen Kapitels im Bronstein (Kap. 1.1.3.2) war.

Varianz:

Bei der Berechnung der Varianz einer Zufallsvariable X kann man das eben errechnete Resultat nutzen und die Varianz anhand der Formel

$$\text{Var}(X) = \text{EF}''_X(1) + \text{EF}'_X(1) - (\text{EF}'_X(1))^2 \quad (\text{A.3})$$

errechnen. Dazu benötigt man die beiden ersten Ableitungen der erzeugenden Funktion.

$$\begin{aligned}
 \text{EF}'_X(z) &= r \left(\frac{1-p}{1-pz} \right)^{r-1} \cdot \frac{p(1-p)}{(1-pz)^2} \\
 \text{EF}''_X(z) &= r \left(\frac{1-p}{1-pz} \right)^{r-1} \cdot \frac{2p^2(1-p)}{(1-pz)^3} + r(r-1) \left(\frac{1-p}{1-pz} \right)^{r-2} \left(\frac{p(1-p)}{(1-pz)^2} \right)^2
 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 \text{EF}'_X(1) &= r \frac{p}{1-p} \\
 \text{EF}''_X(1) &= r \frac{2p^2}{(1-p)^2} + r(r-1) \left(\frac{p}{1-p} \right)^2 = r(r+1) \frac{p^2}{(1-p)^2}
 \end{aligned}$$

Die Varianz ergibt sich dann nach (A.3) zu

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= r(r+1) \frac{p^2}{(1-p)^2} + r \frac{p}{1-p} - \left(r \frac{p}{1-p} \right)^2 \\
 &= r^2 \frac{p^2}{(1-p)^2} + r \frac{p^2}{(1-p)^2} + r \frac{p}{1-p} - r^2 \frac{p^2}{(1-p)^2} \\
 &= r \frac{p}{1-p} \left(\frac{p}{1-p} + 1 \right) = r \frac{p}{(1-p)^2}
 \end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe 16

Die Momente wurden schon in Aufgabe 7 berechnet. Zur Verteilungsfunktion: Mit der Notation von Aufgabe 7 gilt

$$X = e^{\mu + \sigma Z}.$$

Also ist für $t > 0$

$$\mathcal{P}\{X < t\} = \mathcal{P}\{\mu + \sigma Z < \ln t\} = \mathcal{P}\left\{Z < \frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right).$$

Hier ist Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung $N(0, 1)$.

Lösung der Aufgabe 17

Aus der Identität

$$1 = \mathcal{E}1 = \mathcal{E}\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{j=1}^n X_j} = \sum_{i=1}^n \mathcal{E}\frac{X_i}{\sum_{j=1}^n X_j} \stackrel{\text{ident.vert}}{=} n\mathcal{E}\frac{X_1}{\sum_{j=1}^n X_j}$$

ergibt sich nach Kürzen von n auf beiden Seiten die gesuchte Gleichung.

Lösung der Aufgabe 18

Lösung der Aufgabe 19

- Nach der Panjer-Rekursion erhält man die Punktwahrscheinlichkeiten $P\{k\}$ der Summenverteilung rekursiv aus

$$\mathcal{P}\{0\} = e^{-\lambda}$$

und

$$\mathcal{P}\{k+1\} = \frac{\lambda}{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} jQ\{j\}\mathcal{P}\{k+1-j\}.$$

Ist $k+1 \leq n$, so gilt für $j = 1, \dots, k+1$

$$\lambda jQ\{j\} = 1$$

und damit

$$P\{k+1\} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} \mathcal{P}\{k+1-j\}. \quad (\text{A.4})$$

Daraus folgt

$$P\{k\} = e^{-\lambda}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Dies ist richtig für $k = 0$, und für $k > 0$ ergibt sich die Behauptung mit Induktion aus (A.4).

- Für $k = 1, \dots, n$ gilt

$$P\{k\} = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} Q^{*i}\{k\}$$

und

$$Q^{*i}\{k\} = \frac{1}{n^i} \binom{k}{i}, \quad i \leq k. \quad (\text{A.5})$$

Die Beziehung (A.5) ergibt sich mit vollständiger Induktion über k . Für $k = i$ ist (A.5) wahr. Für $k \geq i$ ist $Q^{*i}\{k\} = \frac{1}{n^i} a_{k,i}$, wobei $a_{k,i}$ die Anzahl der (z_1, \dots, z_i) mit $z_j \in \{1, \dots, n\}$ ist, die $z_1 + \dots + z_i = k$ erfüllen. Es ist zu zeigen:

$$a_{k,i} = \binom{k}{i}$$

Dies geschieht mittels Induktion:

$$\begin{aligned} a_{k+1,i} &= \text{Anzahl der } (z_1, \dots, z_i) \text{ mit } z_1 = 1 \\ &+ \text{Anzahl der } (z_1, \dots, z_i) \text{ mit } z_1 > 1 \end{aligned}$$

Wir benutzen die Induktionsvoraussetzung

$$a_{m,i-1} = \binom{m}{i-1} \text{ für alle } m \geq i-1$$

und

$$a_{k,i} = \binom{k}{i}.$$

$a_{k+1,i}$ ist somit die Summe von $a_{k-1,i-1}$ und $a_{k,i}$ (indem man von $z_1 > 1$ zu $z_1 - 1 \geq 1$ übergeht). Mit der Beziehung

$$a_{k+1,i} = \binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} = \binom{k+1}{i}$$

ist die Behauptung bewiesen.

Damit wird für $k \leq n$

$$P\{k\} = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \frac{1}{n^i} \binom{k}{i}.$$

Dies löst die Aufgabe für alle n , nicht nur für $n = 5$ und $n = 6$.

Lösung der Aufgabe 20

Selbstbehalt: Wir behandeln nur den Fall einer Abzugsfranchise. Ist Y die Entschädigung für den Schaden X und M die Priorität², so gilt

$$Y = (X - M)^+.$$

²Der Begriff *Priorität* kommt eigentlich aus dem Rückversicherungsbereich und meint dort den Selbstbehalt des Erstversicherers bei einer Schadenexzedentenrückversicherung. Er wird hier also allgemeiner im Sinne von Selbstbehalt gebraucht.

Wir wollen Entschädigungen der Höhe Null nicht mitzählen. Sei n die erzeugende Funktion von R und

$$p = \mathcal{P}\{Y = 0\}.$$

Dann hat die Zahl der Entschädigungen die erzeugende Funktion

$$m(p + (1 - p)z).$$

Diese ist die erzeugende Funktion der Summenverteilung R^* mit SZV R und SHV

$$\bar{Q}\{0\} = 1 - \bar{Q}\{1\} = p,$$

explizit

$$R^*\{k\} = \sum_{j=k}^{\infty} R\{j\} \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k}.$$

Die SHV Q verändert sich wie folgt. War $f(x)$ die Dichte von X , so ist die transformierte SHV Q^* gegeben durch die Dichte

$$x \mapsto \frac{1}{1-p} f(x+M), \quad x > 0.$$

Hat Q eine Zähldichte $f(x)$, so wird diese ebenso transformiert: Q^* hat die Zähldichte

$$x \mapsto \frac{1}{1-p} f(x+M).$$

Haftungsobergrenze: R bleibt unverändert (sofern die Haftungsgrenze M nicht Null ist), und Q wird abgeändert zu

$$Q^*(A) = Q(A \cap [0, M)) + Q[M, \infty)\delta_M(A).$$

Hier ist δ_M das Wahrscheinlichkeitsmaß mit Masse 1 im Punkte M :

$$\delta_M\{M\} = 1 \text{ oder } \delta_M(A) = 1_A(M).$$

Lösung der Aufgabe 21

- $R = \pi(\lambda)$ führt zur erzeugenden Funktion von R^* der Form

$$z \mapsto e^{\lambda(p+(1-p)z-1)} = e^{\lambda(1-p)(z-1)}.$$

Dies ist die erzeugende Funktion von $\pi(\lambda(1-p))$. Also:

$$R^* = \pi(\lambda(1-p)).$$

$R = \text{NB}(1, q)$ führt zur erzeugenden Funktion von R^* der Form

$$\frac{1-q}{1-q(p+(1-p)z)} = \frac{1-r}{1-rz}$$

mit $r = \frac{q(1-p)}{1-pq}$. Somit ist R^* eine $\text{NB}(1, r)$ -Verteilung.

- $Q = \text{Exp}(\theta)$: Q^* hat die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{Q(m, \infty)} \theta e^{-\theta(x+M)}, \quad x > 0,$$

und dies wird zu

$$\theta e^{-\theta x}, \quad x > 0.$$

Q^* ist also wieder $\text{Exp}(\theta)$. $Q = \text{Par}^*(1, a)$ mit Dichte

$$g(x) = ax^{-(a+1)}, \quad x > 1.$$

Vereinfachend nehmen wir $M > 1$ an. Dann hat Q^* die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{Q(M, \infty)} a(x+M)^{-(a+1)} = M^{-a} a(x+M)^{-(a+1)}, \quad x > 0.$$

Dies ist eine verschobene Pareto-Verteilung.

Lösung der Aufgabe 22

Die erzeugende Funktion berechnet sich aus

$$\text{EF}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p^k z^k \frac{1}{-\ln(1-p)}.$$

Mit dem Hinweis wird dies zu

$$\text{EF}(z) = \frac{\ln(1-pz)}{\ln(1-p)}.$$

Lösung der Aufgabe 23

Nach der Fundamentalformel hat die Poisson'sche Summenverteilung die erzeugende Funktion

$$f(z) = e^{\lambda(g(z)-1)},$$

wobei $g(z)$ die erzeugende Funktion der logarithmischen Verteilung ist. Also ist

$$f(z) = e^{\frac{\lambda}{-\ln(1-p)}(-\ln(1-pz)+\ln(1-p))} = \left(\frac{1-p}{1-pz} \right)^{-\frac{\lambda}{\ln(1-p)}}$$

Dies ist die erzeugende Funktion der negativen Binomialverteilung

$$\text{NB} \left(\frac{\lambda}{-\ln(1-p)}, p \right).$$

Lösung der Aufgabe 24

- Poisson-Verteilung

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\lambda} \\
 p_1 &= \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} = \lambda e^{-\lambda} = \lambda p_0 \\
 p_2 &= \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} = \frac{\lambda}{2!} p_1 \\
 p_3 &= \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} = \frac{\lambda 2!}{3!} p_2 = \frac{\lambda}{3} p_2
 \end{aligned}$$

Allgemein gilt

$$p_{n+1} = \frac{\lambda}{n+1} p_n,$$

denn

$$p_{n+1} = \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda}}{(n+1)!} = \frac{\lambda}{n+1} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \frac{\lambda}{n+1} p_n \quad \checkmark \quad (a=0, b=\lambda)$$

- Binomial-Verteilung

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n \\
 p_1 &= \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1} = \frac{np}{1-p} p_0 \\
 p_2 &= \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2!} p^2 (1-p)^{n-2} = \frac{(n-1)p}{(1-p)2} p_1 \\
 p_3 &= \binom{n}{3} p^3 (1-p)^{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} p^3 (1-p)^{n-3} = \frac{(n-2)p}{(1-p)3} p_2
 \end{aligned}$$

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned}
 p_{i+1} &= \binom{n}{i+1} p^{i+1} (1-p)^{n-i-1} = \frac{n-i}{i+1} \frac{p}{1-p} p_i = \frac{p(n+1-1-i)}{(1-p)(i+1)} p_i \\
 &= \left(\frac{p(n+1)}{(1-p)(i+1)} - \frac{(1+i)p}{(1-p)(i+1)} \right) p_i \quad \checkmark \\
 &\quad \left(a = -\frac{p}{1-p}, b = \frac{p}{1-p}(n+1) \right)
 \end{aligned}$$

- Negativ-Binomial-Verteilung

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \binom{0+r-1}{0} p^r (1-p)^0 = p^r \\
 p_1 &= \binom{1+r-1}{1} p^r (1-p)^1 = r p^r (1-p) = r(1-p) p_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_2 &= \binom{2+r-1}{2} p^r (1-p)^2 = \frac{r(r+1)}{2} p^r (1-p)^2 = \frac{r+1}{2} (1-p) p_1 \\
 p_3 &= \binom{3+r-1}{3} p^r (1-p)^3 = \frac{r(r+1)(r+2)}{3} p^r (1-p)^3 = \frac{r+2}{3} (1-p) p_2
 \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\frac{r+i}{i+1} = \frac{r-1+1+i}{1+i} = \frac{r-1}{1+i} + 1$$

Allgemein gilt:

$$p_{i+1} = \frac{(r+i)(1-p)}{i+1} \stackrel{NR}{=} \left(\frac{(r-1)(1-p)}{i+1} + (1-p) \right) p_i$$

wegen

$$\begin{aligned}
 p_{i+1} &= \binom{i+1+r-1}{i+1} p^r (1-p)^{i+1} = \frac{i+r}{i+1} (1-p) p_i = \frac{p(n+1-1-i)}{(1-p)(i+1)} p_i \\
 &\stackrel{NR}{=} \left(\frac{r-1}{i+1} + 1 \right) (1-p) p_i \quad \checkmark \quad (a = 1-p, b = (1-p)(r-1))
 \end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe 25

- Die Parameter der PSV-Approximation sind hier

$$\lambda = \sum_{i=1}^n p_i$$

und

$$Q^* = Q$$

- Die Parameter lauten

$$\lambda = np$$

und

$$Q^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q_i.$$

Lösung der Aufgabe 26

Die SZV ist keine $NB(1, p)$ -Verteilung. Sie hat die erzeugende Funktion

$$z \mapsto \frac{(1-p)z}{1-pz}.$$

Somit hat die Summenverteilung die charakteristische Funktion

$$t \mapsto \frac{(1-p)\frac{\theta}{\theta-it}}{1-p\frac{\theta}{\theta-it}} = \frac{(1-p)\theta}{(1-p)\theta - it}$$

und dies ist die charakteristische Funktion von $\text{Exp}((1-p)\theta)$.

Lösung der Aufgabe 27

Mit dem angegebenen $f(x)$ wird

$$\mathcal{E}e^{tX} = \int_0^\infty e^{tx} f(x) dx = \int_0^\infty abx^{b-1} e^{-ax^b+tx} dx.$$

Dieses Integral ist nur endlich, wenn für hinreichend großes x

$$-ax^b + tx < 0$$

gilt, und dies gilt nur für $b < 1$. Für $b = 1$ ist das Integral unendlich, wenn $t = a$. Somit:

$$\mathcal{E}e^{tX} < \infty \text{ für alle } t \iff b < 1.$$

Lösung der Aufgabe 28**Lösung der Aufgabe 29**

Für $p \geq \frac{1}{2}$ ist $\mathcal{E}Z_1 \geq 0$, und dann gilt $\Psi(s) = 1$ für alle s .

Sei nun $p < \frac{1}{2}$ angenommen. Dann läßt sich $\Psi(s)$ mit der Faltungsformel berechnen. Hierbei ist $\mathbb{H} = \delta_1$. Die erste Partialsumme entsteht, wenn für ein $n \geq 0$

$$Z_1 + \dots + Z_n = 0$$

gilt und $Z_{n+1} = 1$ ist. Somit ist

$$\mathbb{H}^{*k}(s, \infty) = \begin{cases} 1, & k > s \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit

$$\Psi(s) = \sum_{n>s} (1-q)q^n.$$

Für ganzzahliges s also

$$\Psi(s) = q^{s+1}.$$

Um q zu berechnen, ist die Formel (A.1) der Anleitung zu verwenden. Mit obigem Resultat ist

$$q^{s+1} = (1-p)q^{s+2} + pq^s$$

oder

$$q = (1-p)q^2 + p$$

mit den Lösungen

$$q = \frac{1}{2(1-p)} \pm \frac{2p-1}{2(1-p)},$$

von denen nur $q = \frac{p}{1-p}$ kleiner als 1 ist. Damit gilt:

$$\Psi(s) = \left(\frac{p}{1-p} \right)^{s+1}, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Lösung der Aufgabe 30

- Wir wollen s so bestimmen, daß $\Psi(s) \leq 0,00001$. Dazu benutzen wir die Abschätzung von Lundberg

$$\Psi(s) \leq e^{-Rs}$$

mit dem Anpassungskoeffizienten R . Für $\theta = \frac{1}{1000}$ und SHV $\text{Exp}(\theta)$, SZV $\pi(100)$ und $c = 110000$ ist die positive Lösung R von

$$\lambda + rc = \lambda \frac{\theta}{\theta - r}$$

gegeben durch

$$R = \frac{c\theta - \lambda}{c} = \frac{1}{11000}.$$

Wir wählen nun s so, daß

$$e^{-Rs} = 0,00001$$

oder

$$s = -\ln(0,00001) \cdot 11000 = 126624,18.$$

- Wieder wollen wir erreichen, daß

$$e^{-Rs} = 0,00001,$$

wobei $s = 100000$ festliegt. Dazu muß

$$R = \frac{-\ln(0,00001)}{100000} = 0,0001151$$

gelten, oder

$$R = \theta - \frac{\lambda}{c}, \quad c = \frac{\lambda}{\theta - R}$$

bzw.

$$c = \frac{100}{\left(\frac{1}{1000} - 0,0001151\right)} = 113010,86.$$

Lösung der Aufgabe 31

Die Funktion $f(r) = \lambda + r\pi$ ist linear, die Funktion $g(r) = \lambda \mathcal{E}e^{rZ}$ konvex. Beide starten bei 1 im Punkte $r = 0$, und $g(r) < f(r)$ für $r < R$, $g(r) > f(r)$ für $r > R$. Also muß in der geschilderten Situation $r < R$ gelten.

Lösung der Aufgabe 32

Den Anpassungskoeffizient für die Gesamtschadenverteilung $\text{PSV}(\lambda, Q)$ und die Prämie π berechnet man als Lösung der Gleichung

$$\lambda + r\pi = \lambda \mathcal{E}e^{rX},$$

wobei $X \sim Q$. Wird λ durch λc und π durch πc ersetzt, so ändert sich die Gleichung nicht, R_c muß mit R übereinstimmen.

Interpretation: $c > 1$ bedeutet Vergrößerung des Bestandes (entsprechend mehr Prämie und mehr Schäden). Für die Einhaltung einer Ruinwahrscheinlichkeit ist jedoch kein zusätzliches Eigenkapital erforderlich. Dies kann man als Wirkung des Ausgleichs im Kollektiv auffassen.

Lösung der Aufgabe 33

Wegen $\mu = \mathcal{E}X = \int_0^\infty P(x, \infty) dx$ ist die angegebene Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\mu} P(x, \infty), \quad x > 0$$

eine Dichte. Für die momenterzeugende Funktion erhalten wir für $r > 0$

$$\text{MEF}(r) = \int_0^\infty e^{rx} \frac{1}{\mu} P(x, \infty) dx.$$

Wir benutzen die Anleitung für die Zufallsvariable $Z = e^{rX}$ und erhalten

$$\begin{aligned} M(r) &= \int_0^\infty \mathcal{P}\{Z > t\} dt \\ &= \int_0^\infty P\left(\frac{1}{r} \ln t, \infty\right) dt + 1 \\ &\stackrel{\text{Substitution}}{=} r \int_0^\infty P(u, \infty) e^{ru} du + 1 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\text{MEF}(r) = \frac{1}{\mu r} (M(r) - 1).$$

Lösung der Aufgabe 34

Der empirische Mittelwert $\mu(P_n) = \frac{1}{n} \sum_i x_i$ ist 4,19, die empirische Varianz

$$\text{Var}(P_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu(P_n))^2 = 6,1849$$

und somit ist die Standardabweichung

$$\sigma(P_n) = \sqrt{6,1849} = 2,4869459.$$

Daraus ergibt sich die Prämie $4,19(1 + \beta)$ nach dem Erwartungswertprinzip bzw. $4,19 + 2,4869459\beta$ nach dem Standardabweichungsprinzip.

Die folgende Tabelle zeigt die Prämie nach dem Exponentialprinzip mit unterschiedlicher Risikoaversion a . Zum Vergleich daneben die Prämie nach dem Varianzprinzip:

a	Exponentialprinzip	Varianzprinzip
0.0020000000	4.1961934830	4.1961849000
0.0040000000	4.2024041134	4.2023698000
0.0060000000	4.2086318639	4.2085547000
0.0080000000	4.2148767052	4.2147396000
0.0100000000	4.2211386063	4.2209245000
0.0120000000	4.2274175361	4.2271094000
0.0140000000	4.2337134616	4.2332943000
0.0160000000	4.2400263480	4.2394792000
0.0180000000	4.2463561601	4.2456641000
0.0200000000	4.2527028608	4.2518490000
0.0220000000	4.2590664118	4.2580339000
0.0240000000	4.2654467735	4.2642188000
0.0260000000	4.2718439051	4.2704037000
0.0280000000	4.2782577641	4.2765886000
0.0300000000	4.2846883069	4.2827735000
0.0320000000	4.2911354887	4.2889584000
0.0340000000	4.2975992630	4.2951433000
0.0360000000	4.3040795821	4.3013282000
0.0380000000	4.3105763969	4.3075131000
0.0400000000	4.3170896570	4.3136980000

Lösung der Aufgabe 35

Der Wert $\pi = 50$ ist viel zu groß, jeder Berechnungsversuch endet im Overflow. Für $\pi = 5$ ergibt sich der Anpassungskoeffizient

$$R = 0,230422.$$

Lösung der Aufgabe 36

Mit $s = 110000$ erhalten wir mit dem Anpassungskoeffizient R die erwünschte Schranke für die Ruinwahrscheinlichkeit

$$\Psi(s) \leq e^{-Rs} = 0,00001$$

oder

$$R = \frac{-\ln(0,00001)}{110000} = 0,000104663.$$

Die Prämie, die diesen Anpassungskoeffizienten liefert, ist die nach dem Exponentialprinzip mit Risikoaversion $a = R$. Diese Prämie wird (für kleines a) approximiert durch die Prämie nach dem Varianzprinzip der Form

$$\pi = \mu + \frac{1}{2}R\sigma^2.$$

Der gesuchte Sicherheitszuschlag ist damit

$$\frac{1}{2} \cdot 0,000104663 \cdot \sigma^2.$$

Lösung der Aufgabe 37

$\mu = \frac{1}{\theta}$ und $Q(x, \infty) = e^{-\theta x}$, also

$$\frac{1}{\mu}Q(x, \infty) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0.$$

Dies ist die Dichte von $\text{Exp}(\theta)$.

Lösung der Aufgabe 38

Der Erwartungswert und die Varianz der PSV(λ, Q) sind

$$\lambda\mu_1(Q)$$

und

$$\lambda\mu_2(Q),$$

wenn $\mu_k(Q) = \int x^k Q(dx)$ das k -te Moment von Q ist. Der Variationskoeffizient der PSV(λ, Q) ist somit

$$\mu_1(Q)/(\mu_2(Q)\text{sqrt}\lambda),$$

und dies konvergiert gegen Null für $\lambda \rightarrow \infty$. Der Variationskoeffizient wird als Risikomaß für Versicherungsbestände benutzt. Obige Konvergenz ist dann interpretierbar als Verkleinerung des Risikos bei Vergrößerung des Bestandes, durch diese Vergrößerung kann man das Risiko beliebig klein machen.

Lösung der Aufgabe 39

Raten: Es gibt zwei Möglichkeiten, die beide gleich wahrscheinlich sind; die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher 0,5.

Diese Antwort ist falsch!

Nachdenken und Rechnen: Messungen (oder idealisierte Vorstellungen) ergeben, daß der Radius der Kopfplatte und die Länge des Nagels übereinstimmen und daß der Schwerpunkt des Reißnagels nicht in der Mitte der Kopfplatte, sondern auf dem Nagel liegt, $1/10$ der Länge des Nagels von der Kopfplatte entfernt.

Sei α der Winkel zwischen der Tischplatte und dem Nagel beim Aufprall auf die Tischplatte. Wir nehmen an, daß der Aufprall keinen Drehimpuls erzeugt. Der kritische Winkel α_0 zwischen Null und 90 Grad, ab dem der Reißnagel mit der Spitze nach oben liegenbleibt, erfüllt

$$\tan \alpha_0 = 1/10,$$

$$\alpha_0 = 5,7$$

(siehe Zeichnung; der Schwerpunkt des Reißnagels liegt dann genau senkrecht über dem Aufprallpunkt.) Somit bleibt der Reißnagel mit der Spitze nach oben liegen für

$$\alpha_0 \leq \alpha \leq 90,$$

sowie

$$90 \leq \alpha \leq 180 - \alpha_0.$$

Da der Winkel α gleichverteilt auf $(0, 360)$ ist, beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{180 - 2\alpha_0}{360} = 0,468.$$

Schematische Darstellung des Reißnagels (dünn)
und des kritischen Aufprallwinkels α_0 , der einmal rechts und einmal links auftritt.

Erfahrung sammeln: Lassen Sie einen Reißnagel 10.000 mal auf die Tischplatte fallen und zählen Sie, wie oft der Reißnagel mit der Spitze nach oben liegenbleibt. Ist M diese Anzahl, so ist $M/10.000$ ein guter Schätzwert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit (Gesetz der Großen Zahl).

Lösung der Aufgabe 40

Der Zusammenhang zwischen Fahrleistung und Anzahl der Schadenfälle sieht ungefähr wie in der Zeichnung aus. Im Bereich 0 bis 10.000 wirkt Unerfahrenheit, zwischen 10.000 und 25.000 wirkt die Exposure (d.h. wer länger fährt, kann auch mehr Unfälle erleben), zwischen 25.000 und 40.000 wirkt sich Routine aus, und dann kommt der Dieselknick.

Lösung der Aufgabe 41

- a) Industrie-Feuerversicherung: der Brand in der Spinnerei Ettlingen 1995
- b) Kraftfahrt-Kaskoversicherung: der Hagelschaden von München Herbst 1986
- c) Optionen bei Lebensversicherungsverträgen: Beleihung mit garantiert niedrigem Zins
- d) Längerlebigkeit in der Rentenversicherung: Zwang zur Nachreservierung bei Lebensversicherungsunternehmen
- d') Kfz-Diebstahl nach dem Fall der Mauer

Lösung der Aufgabe 42

- a) Private Krankenversicherung mit Beitragsersatzung bei Leistungsfreiheit.
- b) Bonus-Malus in der Kraftfahrtversicherung.
- c) Gewinnbeteiligung in der Rückversicherung.

Lösung der Aufgabe 43

- a) Versicherungsverträge mit Selbstbeteiligung.
- b) Versicherungsverträge mit Haftungsbeschränkung.

c) Proportionale und nichtproportionale Rückversicherung.

Lösung der Aufgabe 44

Da in der Aufgabe keine Zinsen erwähnt werden, wollen wir auch keine Verzinsung berücksichtigen. Bei einem Schaden kleiner als 10 wird der Versicherungsnehmer die Versicherung nicht in Anspruch nehmen. Sei X die Schadenzahlung und π die Prämieinnahme. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{E}X &= 0,1 \int_{1/10}^{\infty} \frac{x}{100} \exp(-x/100) dx \\ &= 0,1100 \int_{1/10}^{\infty} x \exp(-x/100) dx \\ &= -10(1+x) \exp(-x) \Big|_{1/10}^{\infty} = 11 \exp(-1/10).\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\mathcal{E}\pi = 0,910 + 0,120 = 11.$$

Der Erwartungswert des Gewinns ist somit

$$\mathcal{E}X - \mathcal{E}\pi = 11 - 11 \exp(-1/10) = 1,0468.$$

Lösung der Aufgabe 45

Überall, wo hohe Schäden und niedrige Schäden bei mehreren Versicherungsverträgen gleichzeitig auftreten können. Nicht, wenn (weltweit) alle Verträge im Gleichschritt Schäden produzieren (Insolvenzen, Arbeitslosigkeit, Epidemien).

Lösung der Aufgabe 46

Die Berechnung von Faltungen wird erleichtert durch die Darstellung mit Summen: Sind X_1, X_2, X_3 stochastisch unabhängig mit

$$X_i \sim P_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

dann hat $X = X_1 + X_2 + X_3$ die Verteilung P . X_1 nimmt nur die Werte 0, 1 an; X_2 nur die Werte 1, 2, 3, und X_3 die Werte 0, 1, 2. Also hat P nur Masse auf den Werten 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Im Einzelnen ergibt sich mit der Notation

$$p(i, j, k) = \mathcal{P}\{X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k\}$$

$$P\{1\} = p(0, 1, 0) = 0,2;$$

$$P\{2\} = p(0, 2, 0) + p(1, 1, 0) + p(0, 1, 1) = 0,29167;$$

$$P\{3\} = p(0, 3, 0) + p(0, 2, 1) + p(0, 1, 2) + p(1, 2, 0) + p(1, 1, 1) = 0,325;$$

$$P\{4\} = p(0, 3, 1) + p(0, 2, 2) + p(1, 3, 0) + p(1, 2, 1) + p(1, 1, 2) = 0,1333;$$

$$P\{5\} = p(0, 3, 2) + p(1, 3, 1) + p(1, 2, 2) = 0,04167;$$

$$P\{6\} = p(1, 3, 2) = 0,0083.$$

Etwas einfacher wird die Berechnung durch die Faltung von je zwei Verteilungen (dies ist auch der Ansatz für die Faltung mehrerer Verteilungen):

$$P = P_{1,2} * P_3,$$

$$P_{1,2} = P_1 * P_2.$$

$$P_{1,2}\{1\} = 1/4, P_{1,2}\{2\} = P_{1,2}\{3\} = 1/3, P_{1,2}\{4\} = 1/12.$$

$$P\{1\} = 0,8 * 1/4; P\{2\} = 0,81/3 + 0,11/4;$$

$$P\{3\} = 0,8 * 1/3 + 0,11/3 + 0,11/4;$$

$$P\{4\} = 0,81/12 + 0,11/3 + 0,11/3;$$

$$P\{5\} = 0,1 * 1/12 + 0,11/3; P\{6\} = 0,11/12.$$

Die Wahrscheinlichkeit $P[2, \infty)$ ist

$$1 - P\{1\} = 1 - 0,2 = 0,8.$$

Lösung der Aufgabe 47

Die Aufgabe ist unfair: es gibt nämlich keine explizite analytische Form für die Dichte $f(x)$ der Faltung, nur eine Potenzreihendarstellung geht: für $x > 1$ ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^x \exp(-(x-y))/y^2 dy \\ &= \exp(-x)(1 - 1/x^2 + \log(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!n} (x^n - 1)). \end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe 48

$$k = 1 : \lambda e^{-\lambda} Q\{1\} = \frac{1}{4} \lambda e^{-\lambda};$$

$$\begin{aligned} k = 2 : \lambda e^{-\lambda} Q\{2\} + \lambda^2/2 e^{-\lambda} Q^{*2}\{2\} \\ = \lambda e^{-\lambda}(1/4 + \lambda/32); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 3 : \lambda e^{-\lambda} Q\{3\} + \lambda^2/2 e^{-\lambda} Q^{*2}\{3\} \\ + \lambda^3/6 e^{-\lambda} Q^{*3}\{3\} = \lambda e^{-\lambda}(1/4 + \lambda/32 + \lambda^2/384). \end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe 49

Die absolute Schiefe einer Verteilung P , also

$$\beta_3 = \int (x - \mu)^3 P(dx)$$

mit μ als Mittelwert von P , ist die dritte Kumulante von P , also

$$\beta_3 = \frac{d^3}{dt^3} \log f(t)|_{t=0}$$

mit der momentenerzeugenden Funktion

$$f(t) = \int \exp(tx) P(dx)$$

von P . Ist $g(t)$ die momentenerzeugende Funktion von Q , so gilt

$$f(t) = \exp(\lambda(g(t) - 1))$$

und damit

$$\beta_3 = \frac{d^3}{dt^3} \lambda(g(t) - 1)|_{t=0} = \lambda g'''(0).$$

Dies ist dasselbe wie $\lambda \mu_3(Q)$, wobei

$$\mu_3(Q) = \int x^3 Q(dx)$$

das dritte Moment von Q ist. Die Schiefe ergibt sich nun als Quotient aus β_3 und σ^3 mit $\sigma^2 = \lambda \mu_2(Q)$ zu

$$\lambda^{-1/2} \mu_3(Q) / (\mu_2(Q))^{3/2}.$$

Lösung der Aufgabe 50

Nach der Fundamentalformel ergibt sich die charakteristische Funktion $f(t)$ der Summenverteilung nach

$$f(t) = m(g(t)),$$

wobei $m(z)$ die erzeugende Funktion der Schadenzahl und $g(t)$ die charakteristische Funktion der Schadenhöhe ist. Mit

$$m(z) = \frac{1-p}{1-pz}$$

und

$$g(t) = \vartheta / (\vartheta - it)$$

erhält man

$$f(t) = \frac{1-p}{1-p\vartheta/(\vartheta-it)} = \frac{(1-p)(\vartheta-it)}{\vartheta-it-p\vartheta}.$$

Dies kann man umrechnen zu

$$\frac{(1-p)(\vartheta-it-p\vartheta) + (1-p)p\vartheta}{\vartheta-it-p\vartheta} = 1-p + p \frac{(1-p)\vartheta}{(1-p)\vartheta-it},$$

und dies ist die charakteristische Funktion von

$$(1-p)\delta_0 + p \text{Exp}((1-p)\vartheta).$$

Lösung der Aufgabe 51

- a) private Krankenversicherung: jede Erkrankung ist ein Schadenereignis, dessen Schadenhöhe die ärztlichen Behandlungskosten sind. Die Anzahl der Erkrankungen wird als Zufallsvariable modelliert.
- b) Sturmversicherung: ein Sturm verursacht eine (als Zufallsvariable modellierte) Anzahl versicherter Schäden, deren Schadenhöhe als identisch verteilt aufgefaßt werden können (Begründung?).

Lösung der Aufgabe 52

Der Anpassungskoeffizient R ist die positive Lösung der Gleichung

$$\mathcal{E} \exp(RX) = \exp(R\pi).$$

Für $X \sim PSV(\lambda, Exp(\theta))$ ist dies die Gleichung

$$\exp\left(\lambda\left(\frac{\theta}{\theta - R} - 1\right)\right) = \exp(\pi)$$

oder

$$\lambda\theta - \lambda(\theta - R) = R\pi(\theta - R).$$

Diese Gleichung hat die Lösungen $R = 0$ und

$$R = (\pi\theta - \lambda)/\pi.$$

Dieser Wert ist positiv nur, wenn

$$\pi > \lambda/\theta.$$

Das ist die klassische Bedingung des positiven Sicherheitszuschlages.

Lösung der Aufgabe 53

Die Bestimmungsgleichung des Anpassungskoeffizienten

$$\mathcal{E} \exp(rX) = \exp(r\pi)$$

hat keine positive Lösung, weil für alle $r > 0$

$$\mathcal{E} \exp(rX) = \infty.$$

Es gibt demnach keinen Anpassungskoeffizienten für das Problem (X, π) .

Lösung der Aufgabe 54

Sei Q_0 die Verteilung der X_i und $p = Q_0[0, M]$. Sei ferner Q die Verteilung

$$Q(A) = \frac{1}{1-p} Q_0(A + M).$$

Diese hat charakteristische Funktion

$$g(t) = \frac{1}{1-p} \mathcal{E} \exp(it(X-M)) 1_{(X>M)}.$$

Damit können wir die charakteristische Funktion von S schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \exp(itS) &= \exp(\lambda(\mathcal{E} \exp(itY) - 1)) \\ &= \exp(\lambda(p + \mathcal{E} \exp(it(X-M)) 1_{(X>M)} - 1)) \\ &= \exp(\lambda(1-p)(g(t) - 1)). \end{aligned}$$

Dies ist die charakteristische Funktion der Verteilung $PSV(\lambda(1-p), Q)$.

Lösung der Aufgabe 55

a) Die Dichte der Loggammaverteilung mit Parametern a und b lautet

$$f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{-(b+1)} \log(x)^{a-1}, x > 1.$$

Die Ableitung nach x ist

$$g(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} [(-b-1)x^{-b-2} \log(x)^{a-1} + x^{-b-1}(a-1) \log(x)^{a-2} \frac{1}{x}].$$

Daran erkennt man, daß

$$g(x) \sim \frac{b^a}{\Gamma(a)} (-b-1)x^{-b-2} \log(x)^{a-1} = -h(x),$$

und damit wird

$$f(x) \sim \int_x^\infty h(y) dy.$$

Dies heißt gerade: die Tailwahrscheinlichkeit der Loggamma-Verteilung ist (bis auf einen Faktor) wieder eine Loggamma-Dichte, der Parameter a bleibt unverändert, und der Parameter b wird um 1 verringert. Der Faktor ist

$$\frac{b^{a-1}}{(b-1)^a}.$$

Also

$$\int_x^\infty f(y) dy \sim \frac{b^{a-1}}{\Gamma(a)} x^{-b} \log(x)^{a-1}.$$

b) Wegen $\mathcal{P}(\exp(X) > \exp(x)) = \mathcal{P}(X > x)$ erhalten wir die gesuchte asymptotische Tailwahrscheinlichkeit, wenn wir im obigen Ergebnis x durch $\exp(x)$ ersetzen. Ist also $f(x)$ die Dichte der Gammaverteilung mit Parametern a und b , so gilt

$$\int_x^\infty f(y) dy \sim \frac{b^{a-1}}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-bx).$$

c) Hier braucht man nicht zu approximieren, die exakte Tailwahrscheinlichkeit ist einfach genug. Ist Y exponentialverteilt mit Parameter a , so ist $X = Y^{1/b}$ Weibull-verteilt mit Parametern a, b . Also ist

$$\mathcal{P}(X > x) = \mathcal{P}(Y > x^b) = \exp(-ax^b).$$

Anhang B

Steckbriefe von Verteilungen

In den Tabellen auf den folgenden Seiten steht der Variationskoeffizient für den Ausdruck

$$\frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{\mathcal{E}X}$$

und die Schiefe für die Zahl

$$\frac{\mathcal{E}(X - \mathcal{E}X)^3}{\text{Var}(X)^{\frac{3}{2}}}.$$

B.1 diskrete Verteilungen (SZV)

In der Risikothorie werden Schadenzahlen mit diskreten Zufallsvariablen modelliert.

B.1.1 Gemischte Poisson-Verteilung

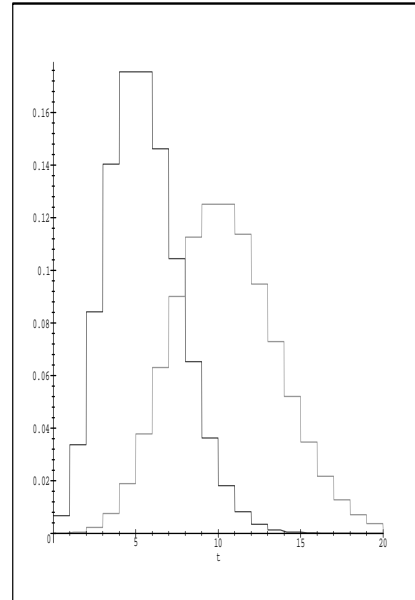
Die gemischte Poisson-Verteilung ist ein sehr allgemeiner Ansatz für die Schadenzahlverteilung mit Varianz \neq Mittelwert. In der Praxis werden als Dichten $\pi(\lambda)$ nur Dichten von Gammaverteilungen, Log-Normal-Verteilungen und von Inversen Gaußverteilungen benutzt. Die gemischten Poisson-Verteilungen haben ein sehr breites Anwendungsfeld.

Zähldichte	$\int_0^\infty \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \pi(\lambda) d\lambda$	Schiefe	$\frac{(\mu(\pi) + \text{Var}(\pi))^{-3/2}}{[\int_0^\infty (\lambda - \mu(\pi))^3 \pi(\lambda) d\lambda + \mu(\pi)]}$
EWert	$\mu(\pi)$	charakt. Funktion	$t \mapsto m(e^{it} - 1)$
Varianz	$\mu(\pi) + \text{Var}(\pi)$	momentenz. Funktion	$t \mapsto m(e^t - 1)$
VarK	$\sqrt{\frac{\mu(\pi) + \text{Var}(\pi)}{\mu^2(\pi)}}$	erzeugende Funktion	$z \mapsto m(z - 1)$

- Der Parameter $\pi(\lambda)$ ist hier eine Dichte auf $(0, \infty)$.
- Ist $\pi(\lambda)$ die Dichte einer Gamma-Verteilung, so ist die gemischte Poisson-Verteilung eine negative Binomialverteilung.

B.1.2 Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung ist die am meisten verwendete Schadenanzahlverteilung im kollektiven Modell. Sie ist nicht sehr anpassungsfähig (nur 1 Parameter), aber leicht zu rechnen. Die Faltung von zwei Poissonverteilungen ist wieder eine Poissonverteilung.



Zähldichten: linke Kurve $\lambda = 5$, rechte Kurve $\lambda = 10$.

Zähldichte	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	Schiefe	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$
EWert	λ	charakt. Funktion	$t \mapsto e^{\lambda(e^t-1)}$
Varianz	λ	momenterz. Funktion	$t \mapsto e^{\lambda(e^t-1)}$
VarK	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	erzeugende Funktion	$s \mapsto e^{\lambda(s-1)}, (s \geq 0)$

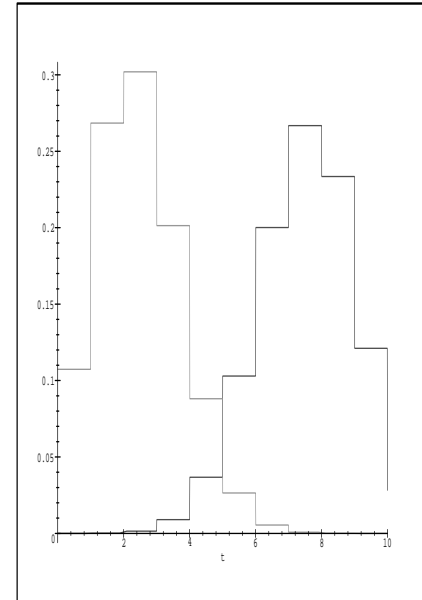
- Parameter $\lambda > 0$
- Für großes λ ist $\pi(\lambda)$ nahe bei der Normalverteilung $N(\lambda, \lambda)$.
- Die Poissonverteilungen gehören zur Panjer-Klasse von SZVen, für welche die Rekursionsformeln gelten.
- Die Poissonverteilung bildet eine exponentielle Familie mit Zähldichten

$$\frac{e^{\theta x - c(\theta)}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei $\theta = \ln \lambda$ und $c(\theta) = e^\theta = \lambda$. Dies kann man für verallgemeinerte lineare Modelle nutzen.

B.1.3 Binomial-Verteilung

Die Binomial-Verteilung ist als Schadenszahlverteilung für kleine homogene Bestände geeignet. Im kollektiven Modell und für große Bestände ist sie unbrauchbar, da die Varianz klein ausfällt und die Anzahl möglicher Schäden beschränkt ist.



Zähldichten für $n = 10$ und $p = 0.2$ bzw. $p = 0.7$.

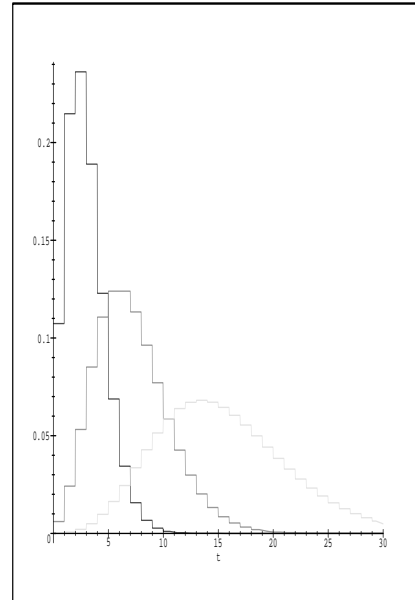
Zähldichte	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	Schiefe	$\frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$
EWert	np	charakt. Funktion	$t \mapsto (pe^{it} + (1-p))^n$
Varianz	$np(1-p)$	momenterz. Funktion	$t \mapsto (pe^t + (1-p))^n$
VarK	$\sqrt{\frac{1-p}{np}}$	erzeugende Funktion	$s \mapsto (ps + (1-p))^n, (s \geq 0)$

- Parameter $0 < p < 1$ und $n = 1, 2, \dots$
- $b(n, p) * b(m, p) = b(n + m, p)$
- Die Varianz ist immer kleiner als der Erwartungswert (*underdispersion*).
- Die Binomial-Verteilungen gehören zur Panjer-Klasse
- Die Binomial-Verteilungen bilden (für festgehaltenes n) eine exponentielle Familie.

B.1.4 Negativ-Binomial-Verteilung

Neben der Poisson-Verteilung ist die Negativ-Binomial-Verteilung die wichtigste Schadenzahlverteilung. Sie ist flexibel wegen der beiden Parameter $r > 0$ und $0 < p < 1$. Sie wird insbesondere als Schadenzahlverteilung in der Krankenversicherung benutzt, seltener im Bereich KH/KF^a.

^aKH= Kraftfahrzeug-Haftpflicht, KF=Kraftfahrzeug-Fahrzeug, besser unter dem Namen Kasko bekannt



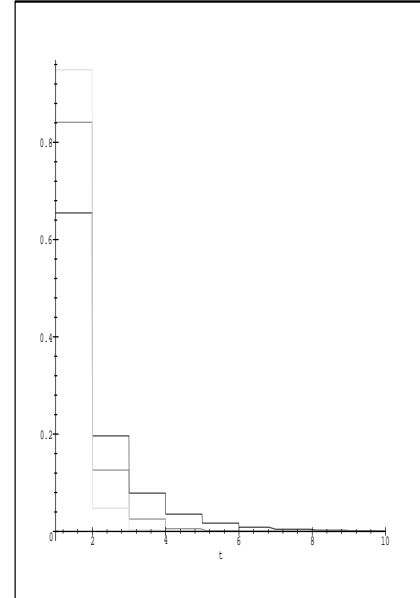
Zähldichten mit $r = 10$ und (von links nach rechts) mit $p = 0.2, 0.4, 0.6$.

Zähldichte	$\binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k$	Schiefe	$\frac{2-p}{\sqrt{r(1-p)}}$
EWert	$r \frac{1-p}{p}$	charakt. Funktion	$t \mapsto \left(\frac{p}{1-(1-p)e^{it}} \right)^r, (t < \ln(1-p))$
Varianz	$r \frac{1-p}{p^2}$	momenterz. Funktion	$t \mapsto \left(\frac{p}{1-(1-p)e^t} \right)^r, (t < \ln(1-p))$
VarK	$\frac{1}{\sqrt{r(1-p)}}$	erzeugende Funktion	$s \mapsto \left(\frac{p}{1-(1-p)s} \right)^r, (0 < s < \frac{1}{1-p})$

- Parameter: $r > 0$ und $0 < p < 1$.
- $NB(n, p) * NB(m, p) = NB(n + m, p)$
- Die Varianz ist immer größer als der Erwartungswert (*overdispersion*).
- Die Negativ-Binomial-Verteilungen gehören zur Panjer-Klasse.
- Mit negativen Binomial-Verteilungen kann man verallgemeinerte lineare Modelle bilden.

B.1.5 Logarithmische Verteilung

Die logarithmische Verteilung wird selten benutzt (in Modellen für kleine Schadenanzahlen). Sie ist jedoch theoretisch interessant als Schadenhöhenverteilung in der PSV (ergibt negative Binomial-Verteilung).



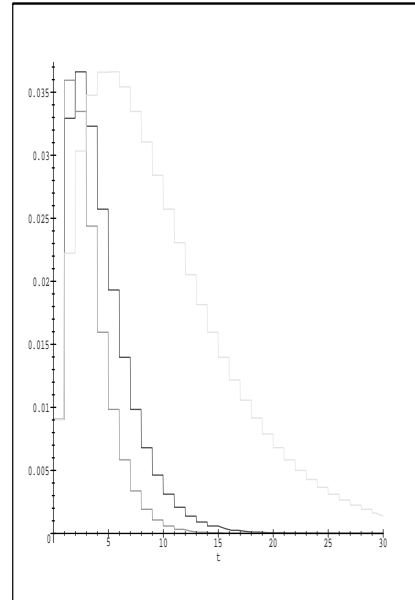
Zähldichten mit den Parametern $q = 0.6$ (durchgezogen), $q = 0.3$ (gestrichelt) und $q = 0.1$ (gepunktet).

Zähldichte	$\frac{p^k}{k - \ln(1-p)}$	Schiefe	$\frac{1}{\sqrt{p(-\ln(1-p)-p)} \left(\frac{\ln^2(1-p)}{-\ln(1-p)-p} + p(-\ln(1-p) - 2p) \right)}$
EWert	$\frac{p}{-(1-p)\ln(1-p)}$	charakt. Funktion	$t \mapsto \frac{\ln(1 - pe^{it})}{\ln(1-p)}$
Varianz	$\frac{p(-\ln(1-p) - p)}{(1-p)^2 \ln^2(1-p)}$	momentenz. Funktion	$t \mapsto \frac{\ln(1 - pe^t)}{\ln(1-p)}$
VarK	$\sqrt{\frac{p}{-\ln(1-p) - p}}$	erzeugende Funktion	$z \mapsto \frac{\ln(1 - pz)}{\ln(1-p)}$

- Parameter: $0 < p < 1$

B.1.6 Verallgemeinerte Poisson-Verteilung

Die verallgemeinerte Poisson-Verteilung ist für alle Versicherungsbereiche geeignet. Die Verteilung wurde erst vor einigen Jahren entdeckt und ist daher noch weitgehend unbekannt. Sie hat 2 Parameter, ist also wesentlich flexibler als die Poisson-Verteilung, und sie paßt besser zu den Versicherungsdaten wegen ihrer overdispersion: Die Varianz ist immer größer als der Mittelwert.



Zähldichten für $\theta = 0.1$ und $\lambda = 0.2$ (rechts), $\lambda = 0.5$ (Mitte) und $\lambda = 0.7$ (links gepunktet).

Zähldichte	$\theta(\theta + k\lambda)^{k-1} e^{-\theta - k\lambda}$	Schiefe	$\frac{1 + 2\lambda}{\sqrt{\theta(1 - \lambda)}}$
EWert	$\frac{\theta}{1 - \lambda}$	charakt. Funktion	$e^{\theta(u-1)}, u = e^{it} e^{\lambda(u-1)}$
Varianz	$\frac{\theta}{(1 - \lambda)^3}$	momenterz. Funktion	$e^{\theta(u-1)}, u = e^t e^{\lambda(u-1)}$
VarK	$\sqrt{\frac{1}{\theta(1 - \lambda)}}$	erzeugende Funktion	$e^{\theta(u-1)}, u = ze^{\lambda(u-1)}$

- Parameter $\theta > 0$ und $0 < \lambda < 1$.
- Für diese Verteilungen sind Rekursionen für die Summenverteilung (ähnlich denen von Panjer) bekannt.
- Die implizite Definition der CF, EF und MEF ist für viele Zwecke ausreichend:

$$(\ln \text{MEF}(t))' = \theta u'$$

$$u' = u(1 + \lambda u'), u(0) = 1$$

liefern z. Bsp. $u'(0) = \frac{1}{1-\lambda}$ und damit $\mu = \frac{\theta}{1-\lambda}$.

B.2 stetige Verteilungen (SHV)

In der Risikothorie werden Schadenhöhen mit stetigen Zufallsvariablen modelliert.

B.2.1 Gleich-Verteilung

Die Gleich-Verteilung ist nur von theoretischer Bedeutung oder für Monte-Carlo-Simulationen wichtig. Sie ist Ausgangsgröße für die Generierung von Pseudozufallszahlen¹.

Dichte	$1_{[0,1]}(x)$	Schiefe	0
EWert	$\frac{1}{2}$	charakt. Funktion	$\frac{1}{it}(e^{it} - 1)$
Var	$\frac{1}{12}$	momenterz. Funktion	$\frac{1}{t}(e^t - 1)$
VarK	1		

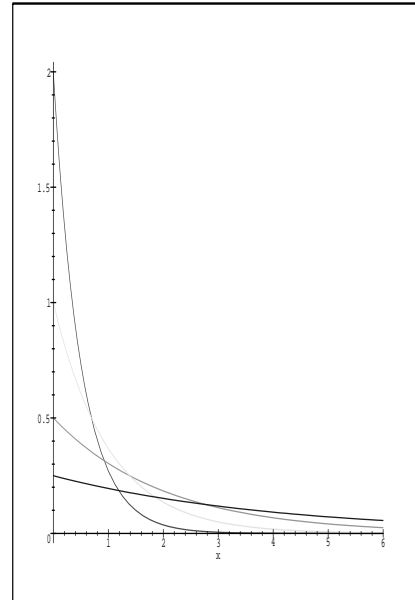
- Parameter: Normalerweise a und b mit $a < b$. Da dies jedoch der häufigste Fall ist, wurde auf dieser Seite durchgehend $a = 0$, $b = 1$ angenommen.
- Hat X eine stetige Verteilungsfunktion F , so ist die Zufallsvariable $F(X)$ gleichverteilt.
- Es gibt explizite Formeln für die Dichte der Faltung von Gleichverteilungen.

¹Die meisten Computer bieten lediglich gleichverteilte Zufallszahlen an

B.2.2 Exponential-Verteilung

Die Exponential-Verteilung hat nur einen Parameter und ist daher weniger flexibel. Sie wird als grobes Modell für kleine und mittlere Schäden (KH/KF^a, Hausrat, GewerbeV) benutzt, weil in diesem Modell gut gerechnet werden kann.

^aKH= Kraftfahrzeug-Haftpflicht, KF=Kraftfahrzeug-Fahrzeug, besser unter dem Namen Kasko bekannt



Dichten mit Parameter $\theta = 2, \theta = 1, \theta = 0.5, \theta = 0.25$

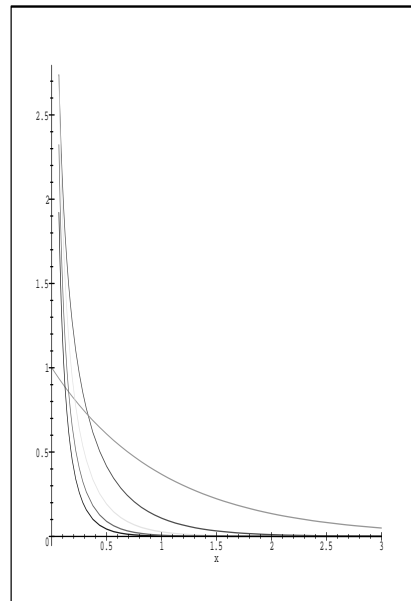
Dichte	$\theta e^{-\theta x} 1_{(0, \infty)}(x)$	Schiefe	2
EWert	$\frac{1}{\theta}$	charakt. Funktion	$\frac{\theta}{\theta - it}$
Var	$\frac{1}{\theta^2}$	momentenz. Funktion	$\frac{\theta}{\theta - t}$
VarK	1		

- Parameter $\theta > 0$
- Die Faltung von Exponential-Verteilungen mit demselben θ ergibt eine Gamma-Verteilung.
- Ist U gleichverteilt, so ist $X = \frac{1}{\theta} \ln(U)$ exponential-verteilt mit Parameter θ .
- Die Leiterhöhenverteilung zu $\text{Exp}(\theta)$ ist $\text{Exp}(\theta)$.
- Der Anpassungskoeffizient und die Ruinwahrscheinlichkeit können für die Schadenhöhenverteilung $\text{Exp}(\theta)$ explizit berechnet werden.

B.2.3 Gamma-Verteilung

Die Gamma-Verteilung wird zur Modellierung kleinerer bis mittlerer Schäden (KH/KF^a, GewerbeV, Hausrat) verwandt. Sie ist flexibel wegen der beiden Parameter.

^aKH= Kraftfahrzeug-Haftpflicht, KF=Kraftfahrzeug-Fahrzeug, besser unter dem Namen Kasko bekannt



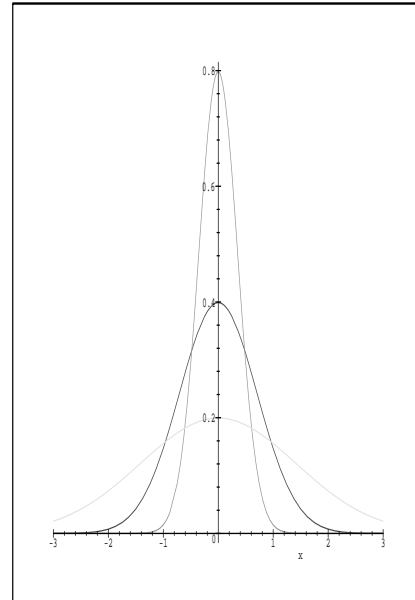
Gamma-Verteilungen mit Mittelwert 1: $\Gamma(1, 1) = \text{Exp}(1)$ (dick), $\Gamma(2, \frac{1}{2})$ (dünn) und (gestrichelt, von unten nach oben) $\Gamma(3, \frac{1}{3})$, $\Gamma(4, \frac{1}{4})$, $\Gamma(5, \frac{1}{5})$.

Dichte	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} 1_{(0,\infty)}(x)$	Schiefe	$\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$
EWert	$\frac{\alpha}{\beta}$	charakt. Funktion	$\left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^\alpha$
Var	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	momentenz. Funktion	$\left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha$
VarK	$\frac{1}{\alpha}$		

- Parameter $\alpha > 0, \beta > 0$
- Die Faltung von Gamma-Verteilungen mit demselben β ergibt eine Gamma-Verteilung.
- Gammaverteilungen sind in der Risikothorie die wichtigsten Verteilungen für die Anwendung verallgemeinerter linearer Modelle.

B.2.4 Normal-Verteilung

Die Normal-Verteilung ist geeignet zur Modellierung von Schadendaten im mittleren Bereich (KH/KF, GewerbeV) mit großem μ ; oder als Gesamtschadenverteilung für große, (fast) homogene Bestände. Die Normalverteilung erlangt auch Bedeutung als Approximationsergebnis bei der Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes (für Summenverteilungen bzw. für Faltungen). Die Faltung von Normal-Verteilungen ergibt wieder eine Normalverteilung.



Dichten mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ (dick), $\sigma^2 = 0.5$ (dünn) und $\sigma^2 = 2$ (gestrichelt).

Dichte	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$	Schiefe	0
EWert	μ	charakt. Funktion	$e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$
Var	σ^2	momenterz. Funktion	$e^{t\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$
VarK	$\frac{\sigma}{\mu}$		

- Parameter: Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\sigma^2 > 0$.
- Sind U_1, U_2 gleichverteilt und stochastisch unabhängig, dann ist

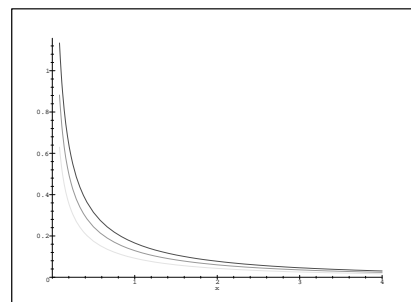
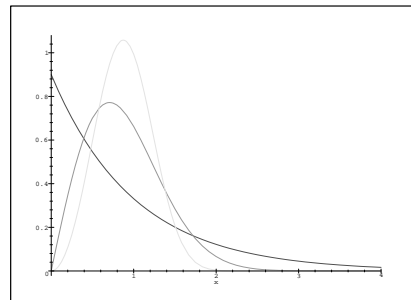
$$X = \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2)$$

$N(0, 1)$ -verteilt.

- Ist X $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt, so ist $Y = (X - \mu)/\sigma$ $N(0, 1)$ -verteilt.
- Normalverteilungen bilden eine exponentielle Familie von Verteilungen. Dies kann man für verallgemeinerte lineare Modelle nutzen.

B.2.5 Weibull-Verteilung

Die Anwendung der Weibull-Verteilung ist abhängig vom Wert des Parameters β : Für $\beta = 1$ erhält man die Exponentialverteilung (s. dort). Für $\beta > 1$ besteht im Versicherungsbereich keine Anwendung. Mit $\beta < 1$ wird die Weibull-Verteilung zur Modellierung von Großschäden (Kraftfahrt-Haftpflicht, Industrieversicherung, Rückversicherung) eingesetzt.



oben: $\beta = 0.9$ und $\alpha = 1$ (dick), $\alpha = 2$ (dünn) und $\alpha = 3$ (gestrichelt).

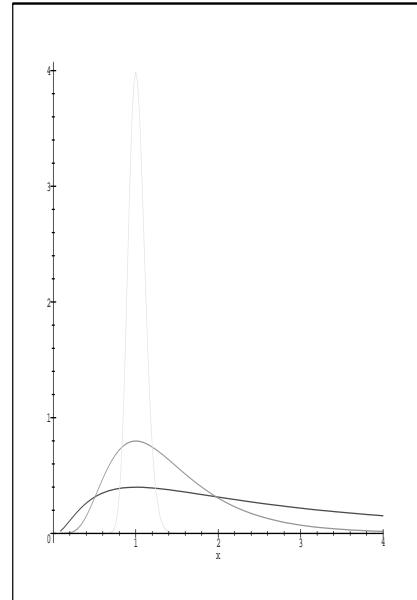
unten: $\alpha = 0.5$ und $\beta = 0.9$ (dick), $\beta = 0.7$ (dünn) und $\beta = 0.5$ (gestrichelt).

Dichte	$\alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta} 1_{(0,\infty)}(x)$	Schiefe	$\frac{(\frac{1}{\beta}+1)[\frac{2}{\beta}+1-\Gamma(\frac{1}{\beta}+1)]}{(\frac{1}{\beta}+1-\Gamma(\frac{1}{\beta}+1))^{\frac{3}{2}}\Gamma^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{\beta}+1)} - 2\frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{\beta}+1)}{(\frac{1}{\beta}+1-\Gamma(\frac{1}{\beta}+1))^{\frac{1}{2}}}$
EWert	$\alpha^{\frac{1}{\beta}}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)$	charakt. Funktion	nicht explizit darstellbar
Var	$\alpha^{\frac{2}{\beta}}\left(\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right)$	momentenz. Funktion	nicht explizit darstellbar exist. nur für $\beta \geq 1$.
VarK	$\sqrt{\frac{1+\beta}{\beta\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)}-1}$		

- Parameter $\alpha > 0$ und $\beta > 0$.
- Ist X exponential-verteilt, so ist $Y = X^\beta$ weibull-verteilt.
- Für $\beta > 0$ existieren alle Momente. Die MEF existiert nur für $\beta \geq 1$

B.2.6 Log-Normal-Verteilung

Die Log-Normal-Verteilung ist geeignet zur Modellierung von Großschäden aus den Bereichen Kraftfahrt-Haftpflicht, Kraftfahrt-Fahrzeug, Industrieversicherung und Rückversicherung.



Dichten für $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 0.1$ (dick), $\sigma^2 = 0.5$ (dünn) und $\sigma^2 = 1$ (gestrichelt).

Dichte	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2}$	Schiefe	$(e^{\sigma^2} + 2)\sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$
EWert	$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$	charakt. Funktion	nicht explizit darstellbar
Var	$e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$	momentenz. Funktion	existiert nicht
VarK	$\sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$		

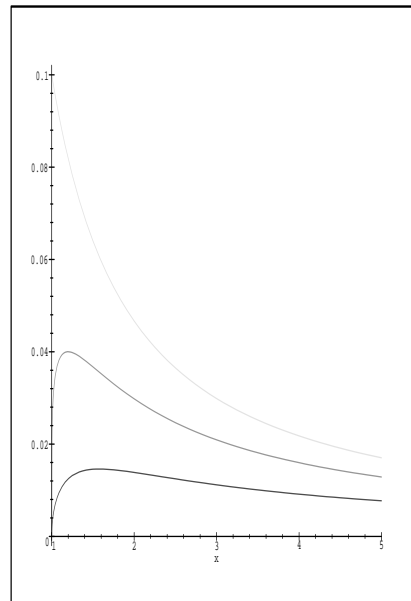
- Parameter μ und σ^2 .
- Für die Log-Normal-Verteilung existieren alle Momente:

$$\mathcal{E}X^n = e^{n\mu + \frac{n^2\sigma^2}{2}}.$$

- Ist $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, so ist $Y = e^X \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$.

B.2.7 Log-Gamma-Verteilung

Die Log-Gamma-Verteilung ist geeignet zur Modellierung von Schadendaten im (extremen) Großschadenbereich (Industriefeuerversicherung, Kraftfahrthaftpflicht, Rückversicherung). Als Spezialfall enthält die Familie die Pareto-Verteilung. Ist X gammaverteilt, dann ist $Y = e^X$ Log-Gamma-verteilt.



Dichten für $\beta = 0.1$ und $\alpha = 1$ (dick), $\alpha = 1.2$ (dünn) und $\alpha = 1.5$ (gestrichelt).

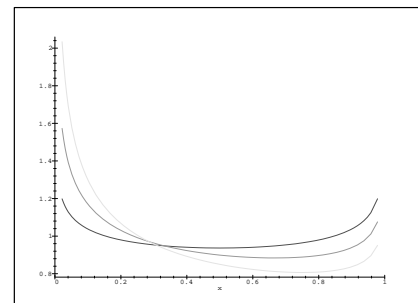
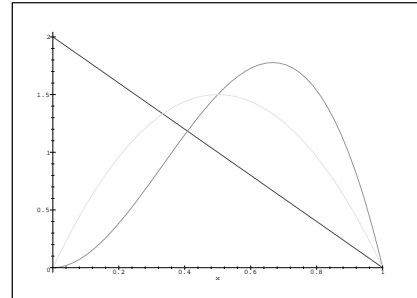
Dichte	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\beta+1)} (\ln x)^{\alpha-1} \cdot 1_{(1,\infty)}$	Schiefe	siehe Bemerkungen
EWert	$\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^{-\alpha}$	charakt. Funktion	nicht explizit angebar
Var	$\left(1 - \frac{2}{\beta}\right)^{-\alpha} - \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)^{-2\alpha}$	momenterz. Funktion	existiert nicht
VarK	$\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\beta(\beta-2)}\right)^\alpha} - 1$		

- Parameter $\alpha > 0$ und $\beta > 0$.
- Es existieren nur die Momente der Ordnung kleiner als β . Die Formeln für Erwartungswert und Varianz/Variationskoeffizient gelten nur für $\beta > 1$ bzw. $\beta > 2$, die Formel für die Schiefe nur für $\beta > 3$.

- Die Schiefe ist
$$\frac{\left(\frac{\beta}{\beta-3}\right)^\alpha - 3\left(\frac{\beta^2}{(\beta-2)(\beta-1)}\right)^\alpha + 2\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^{3\alpha}}{\left(\left(\frac{\beta}{\beta-2}\right)^\alpha - \left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^{2\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

B.2.8 Beta-Verteilung

Die Beta-Verteilung findet vor allem im Kleinschadenbereich und für Schadenquoten Anwendung. Sie ist mit 2 Parametern sehr flexibel.



oben: $\beta = 2$ und $\alpha = 1$ (dick),
 $\alpha = 2$ (dünn) und $\alpha = 3$
 (gestrichelt).
 unten: $\beta = 0.9$ und $\alpha = 0.9$
 (dick), $\alpha = 0.8$ (dünn) und $\alpha =$
 0.7 (gestrichelt).

Dichte	$1/B(\alpha, \beta)x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}1_{(0,1)}(x)$	Schiefe	siehe Bemerkungen
EWert	$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$	charakt. Funktion	nicht explizit angebar
Var	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$	momentenz. Funktion	nicht explizit angebar
VarK	$\sqrt{\frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta + 1)}}$		

- Parameter $\alpha > 0$ und $\beta > 0$.
- Für $\alpha, \beta < 1$ wird die Dichte U-förmig.
- Die Verteilung ist für $\alpha = \beta$ symmetrisch um $\frac{1}{2}$, d.h. ihre Schiefe ist 0, im allgemeinen

berechnet sich die Schiefe aus

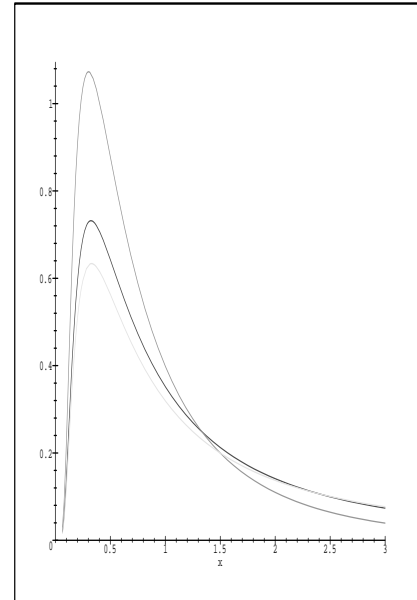
$$\frac{\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)} - 3\frac{\alpha^2(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} + 2\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^3}{\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}\right)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{2(\beta - \alpha)\sqrt{\alpha + \beta + 1}}{(\alpha + \beta + 2)\sqrt{\alpha\beta}}$$

- Die Betafunktion $B(\alpha, \beta)$ ist definiert durch

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

B.2.9 Invers-Gaußsche-Verteilung

Die Invers-Gaußsche-Verteilung wird in verallgemeinerten linearen Modellen verwendet. In der Risikotheorie ist sie bisher nur wenig erforscht und wird demzufolge auch kaum angewandt. Sie ist jedoch eine mögliche Alternative zu Gammaverteilungen.



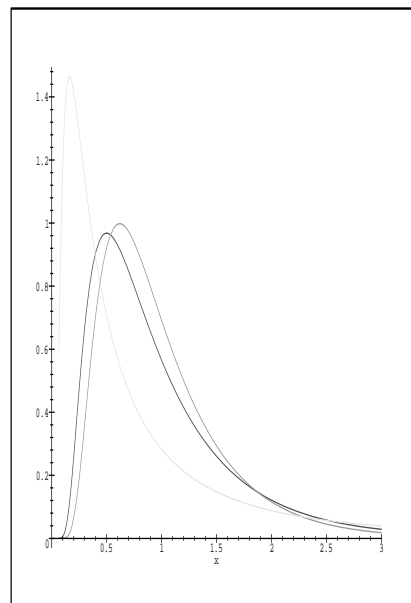
Dichten für $\lambda = 1, \mu = 1, 2, 3$ (oben) und für $\lambda = 0.5, 2, 3$ und $\mu = 1$ (unten).

Dichte	$\left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}} 1_{(0,\infty)}(x)$	Schiefe	$3\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$
EWert	μ	charakt. Funktion	$e^{\frac{\lambda}{\mu} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\mu^2 it}{\lambda}}\right)}$
Var	$\frac{\mu^3}{\lambda}$	momenterz. Funktion	$e^{\frac{\lambda}{\mu} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda}}\right)}$
VarK	$\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$		

- Parameter $\lambda > 0$ und $\mu > 0$.
- Sind X_1, \dots, X_n stochastisch unabhängig mit inverser Gauß-Verteilung mit Parametern λ, μ , dann hat $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ wieder eine inverse Gaußverteilung mit den Parametern $n\lambda$ und $n\mu$.

B.2.10 Pareto-Verteilung

Die Pareto-Verteilung ist geeignet zur Modellierung von Großschäden, insbesondere im Industrie-Feuer und Rückversicherungsbereich. Im Text 2.4.2 wurden drei verschiedene Paretoverteilungen erwähnt: $Par^*(a, 1)$, $Par^*(a, b)$ und $Par(a, b)$. Hier betrachten wir die $Par^*(a, b)$ -Verteilungen. Die Verteilungen $Par(a, b)$ werden danach als verschobene Paretoverteilungen abgehandelt.



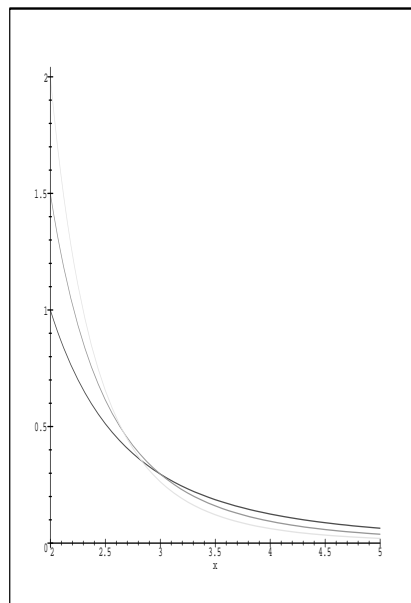
Dichten mit $b = 2$ und $a = 2$ (dick), $a = 3$ (dünn) und $a = 4$ (gestrichelt).

Dichte	$\frac{a}{b}(x/b)^{-(a+1)}1_{(b,\infty)}(x)$	Schiefe	$\frac{\frac{a}{a-3} - 3\frac{a^2}{(a-2)(a-1)} + 2\frac{a^3}{(a-1)^3}}{\left(\frac{a}{a-2} - \frac{a^2}{(a-1)^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$
EWert	$\frac{ab}{a-1}$	charakt. Funktion	nicht angebar
Var	$b^2\left(\frac{a}{a-2} - \frac{a^2}{(a-1)^2}\right)$	momentenz. Funktion	existiert nicht
VarK	$\sqrt{\frac{(a-1)^2}{a(a-2)} - 1}$		

- Parameter $a > 0$ und $b > 0$. ..
- Ist X paretoverteilt mit Parametern a und 1, dann ist $\log X$ exponentialverteilt mit Parameter a .

B.2.11 Vershobene Pareto-Verteilung

Die verschobene Pareto-Verteilung ist geeignet zur Modellierung von Großschäden, insbesondere im Industrie-Feuer und Rückversicherungsbereich.



Dichten mit $\beta = 2$ und $\alpha = 2$ (dick), $\alpha = 3$ (dünn) und $\alpha = 4$ (gestrichelt).

Dichte	$ab(1 + bx)^{-(a+1)}1_{(0,\infty)}(x)$	Schiefe	$\frac{\frac{a}{a-3} - 3\frac{a^2}{(a-2)(a-1)} + 2\frac{a^3}{(a-1)^3}}{\left(\frac{a}{a-2} - \frac{a^2}{(a-1)^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$
EWert	$\frac{1}{b(a-1)}$	charakt. Funktion	nicht angebar
Var	$\frac{1}{b^2} \left(\frac{a}{a-2} - \frac{a^2}{(a-1)^2} \right)$	momentenz. Funktion	existiert nicht
VarK	$\sqrt{\frac{a(a-1)^2}{a-2} - a^2}$		

- Parameter $a > 0$ und $b > 0$.
- Ist X Pareto-verteilt, so hat $Y = \frac{1}{b}(X - 1)$ eine verschobene Pareto-Verteilung.

Literaturverzeichnis

- [1] Beard,R.E. and Pentikäinen,T. and Pesonen,M. : Risk Theory. Chapman and Hall, 1984.
- [2] Beekman,J.A.: Two Stochastic Processes. Almqvist and Wiksell International, 1974.
- [3] Borch,K.: The Mathematical Theory of Insurance. Lexington Books, 1974.
- [4] Bowers,N.K. and Gerber,H.U. and Hickman,J.C. and Jones,D.A. and Nesbitt,C.J.: Actuarial Mathematics. Society of Actuaries, 1987.
- [5] Bühlmann,H.: Mathematical Methods in Risk Theory. Springer, 1970.
- [6] Daykin,C.D. and Pentikäinen,T. and Pesonen,M.: Practical Risk Theory for Actuaries, Chapman and Hall, 1994.
- [7] Embrechts, P., Klüppelberg, C., und Mikosch, T.: Modelling extremal events. Springer 1997.
- [8] Feller,W.: An Introduction to Probability Theory and its Application. Wiley, 1970, BandI und II.
- [9] Gerber,H.U.: An Introduction to Mathematical Risk Theory. S.S. Huebner Foundation, 1979.
- [10] Goovaerts,M.J. and Vylder,F. de and Haezendonck,J.: Insurance Premiums. North-Holland, 1984.
- [11] Heilmann,W.R.: Grundbegriffe der Risikotheorie. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 1987.
- [12] Hipp,C. und Michel,R.:Risikotheorie: Stochastische Modelle und Statistische Methoden. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 1990, Angewandte Versicherungsmathematik, Band 24.
- [13] Hogg,R.V. and Klugman,S.A.: Loss Distributions. Wiley, 1984.
- [14] Hossack,I.B. and Pollard,J.H. and Zehnwirth,B.: Introductory Statistics With Application in General Insurance. Cambridge University Press, 1984.
- [15] Jordan,C.W.: Life Contingencies. The Society of Actuaries, 1982.

- [16] Kahn,P.M.: Credibility: Theory and Applications. Academic Press, 1975.
- [17] Karlin,S. and Taylor,H.M.: A First Course in Stochastic Processes. Academic Press, 1975.
- [18] Kremer,E.: Einführung in die Versicherungsmathematik. Vandenhoeck und Ruprecht, 1985.
- [19] Krengel,U.: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Vieweg, 1991, 3. Auflage, Vieweg Studium – Aufbaukurs Mathematik, Band 21.
- [20] Mack, T.: Schadenversicherungsmathematik. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 1997, Angewandte Versicherungsmathematik, Band 26.
- [21] Seal,H.L.: Stochastik Theory of a Risk Business. Wiley, 1969.
- [22] Straub,E.: Non-Life Insurance Mathematics. Springer, 1988.
- [23] Sundt,B.: An Introduction to Non-Life Insurance Mathematics. Verlag Versicherungswirtschaft, 1984, Karlsruhe.

Index

- a-priori-Verteilung, 83
- Abzugsfranchise, 4
- Aktuar, 2
- Algorithmus, 36
- Alter, 100
- Alter des Autos, 100
- Anpassungskoeffizient, 59
- Approximationen von Tailwahrscheinlichkeiten, 55
- Ausgleich im Kollektiv, 2

- Bayes'sche Statistik, 83
- Berechnung von Summenverteilungen, 41
- Binomialverteilung, 20, 21

- charakteristische Funktion, 26
- Cramer-Lundberg-Ungleichung, 59

- DAV, 2
- Deregulierung, 1
- Diskrete Ruinwahrscheinlichkeit, 57

- Eigenschaften von Praemienprinzipien, 71
- Eindeutigkeitssatz, 28
- Elementarereignisse, 9
- empirischen Verteilung, 73
- Erfahrungstarifizierung, 84
- erwartungstreu, 75
- Erwartungswerte, 12
- erzeugende Funktion, 26
- EU-Binnenmarkt, 1
- Exponentialverteilung, 20, 52

- Faltungen, 18
- Faltungseigenschaften, 40
- Faltungsformel, 19, 63
- Faltungssatz, 27
- Fortschreibungs-Ansatz, 57
- Franchisen, 4

- Fundamentalgleichung, 39
- Funktionsweise von Versicherung, 2

- Gamma-Verteilung, 22
- Gammaverteilung, 52
- Gammaverteilungen, 34
- geometrische Verteilung, 39
- Gesamtschadenverteilung, 38
- Gewinnbeteiligung, 3
- Gleichverteilung, 21

- Hachemeister, 88
- Hachemeister-Daten, 87
- Haftungsbegrenzung, 78
- Haftungsobergrenze, 25
- hierarchische Credibility, 88

- Individuelles Modell, 35
- Integralfranchise, 4
- Irrtumsrisiko, 5
- Iterationen, 77

- Kilometerleistung, 100
- Kollektiv, 2
- Kollektives Modell, 37
- Konvergenz der Poissonverteilung, 33
- Korrelation, 17
- Korrelationskoeffizienten, 18
- Kumulanten, 27
- Kumulrisiken, 3
- Kumulrisiko, 6

- Lebensdauerverteilungen, 51
- lineare Modelle, 82
- Log-Likelihood-Funktion, 80
- Logarithmische Verteilung, 22
- Loggammaverteilung, 55, 68
- Lognormalverteilung, 52, 54

- Maximum-Likelihood-Methode, 73

- Mehrfachintegral, 17
- mittlere Restlebensdauer, 51
- Modellbildung, 6
- Momente, 12
- Momentenmethode, 73
- momenterzeugende Funktion, 26
- Monte-Carlo-Simulationen, 23
- moralisches Risiko, 4

- Negative Binomial-Verteilung, 23
- nichtparametrische Verfahren, 73
- Normalapproximation, 48
- Normalverteilung, 20

- Panjer, 42
- Panjer-Rekursion, 42
- parametrischen Verfahren, 73
- Pareto-Verteilung, 21
- Paretoverteilung, 52, 54
- Paretoverteilungen, 51
- Poisson'sche Summenverteilung, 39
- Poissonverteilung, 21
- Portefeuille, 2
- Produktentwicklung, 4
- prozentuale Selbstbeteiligung, 4
- PSV-Approximation, 44, 46

- Quantiltransformation, 23

- Rademacherfunktionen, 31
- Regionalklasse, 100
- Regressionsvektor, 82
- Rekord, 63
- Rekursionsvorschrift, 36
- relativer Fehler, 50
- Roulette, 6
- Ruintheorie, 57
- Ruinwahrscheinlichkeit , 61

- Satz vom iterierten Logarithmus, 31
- Satz von Fubini, 16
- Schadenfreiheit, 100
- Schadenzahlverteilung, 38
- Schiefe, 14
- Selbstbeteiligung, 25
- Selbstbeteiligungen, 4
- Sicherheitszuschlag, 59

- skalierte Poissonverteilung, 41
- sparse vector method, 41
- Standardabweichung, 13
- Standardnormalverteilung, 55
- Statistische Verfahren, 73
- Stetigkeitssatz, 28
- Strukturverteilung, 85
- subexponentielle Verteilungen, 48
- Substitutionsregel, 24
- Summenverteilungen, 39

- Tailwahrscheinlichkeiten, 48
- transformierte Beobachtungen, 78
- Tschebyscheff'sche Ungleichung, 29

- Varianz, 13
- Variationskoeffizient, 13
- verallgemeinertes lineares Modell, 82
- Verschiebeformel, 13
- Versicherungs-Futures, 2
- Versicherungssumme, 25
- Versicherungswirtschaft, 1
- Verteilung, 10
- Verteilungsfunktion, 10
- Vorbewertung, 83

- Weibull-Verteilung, 22
- Weibullverteilung, 52, 54, 76

- Zentraler Grenzwertsatz, 32
- Zufallsrisiko, 5
- Zufallsvariable, 10