1 SKYRIUS

Pagrindinės sąvokos

1.1. APIBRĖŽIMAI IR ŽYMENYS

Daugelis gamtos reiškinių aprašomi lygtimis, kurios vadinamos *matematinės fizikos lygtimis.* Dažniausiai tai dalinių išvestinių lygtys, t.y. lygtys, kuriose nežinomasis yra kelių (ne mažiau kaip dviejų) kintamųjų funkcijos. Čia daugiausia nagrinėsime vienos lygties su viena nežinomąja funkcija atvejį. Ieškomąją argumento $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ funkciją žymėsime raide u, o jos dalines išvestines –

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}};$$

čia: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – multiindeksas, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i,\ \alpha_i$ – sveikieji neneigiami skaičiai. Funkcijos u gradientą ir jo modulį žymėsime taip:

$$u_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}), \quad |u_x| = \Big(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\Big)^{1/2}.$$

Lygtis, kuri sieja nepriklausomąjį kintamąjį x, ieškomąją funkciją u ir jos dalines išvestines, vadinama *dalinių išvestinių lygtimi.* Dalinių išvestinių lygtis vadinama k-osios eilės lygtimi, jeigu į ją įeina bent viena ieškomos funkcijos k-osios eilės dalinė išvestinė ir neįeina aukštesnių eilių dalinės išvestinės. Bendru atveju k-osios eilės dalinių išvestinių lygtį galima užrašyti taip:

$$F(x, \delta_k u) = 0; \tag{1.1}$$

čia:

$$\delta_k u = \Big(u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\Big)$$

yra vektorius, turintis

$$N_k = \frac{(n+k)!}{n!\,k!}$$

koordinačių; F – argumentų $x \in \mathbb{R}^n,\ p = (p_1, \dots, p_{N_k}) \in \mathbb{R}^{N_k}$ funkcija, tenkinanti sąlygą

$$\sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} \left(\frac{\partial F(x,p)}{\partial p_i}\right)^2 \neq 0.$$

Dalinių išvestinių lygties sprendiniu vadinama bet kokia funkcija $u(x)$, kurią įrašius į (1.1) lygtį gaunama tapatybė nepriklausomo kintamojo x atžvilgiu.

P a s t a b a. Nagrinėjamose lygtyse kartais patogu išskirti kokį nors nepriklausomą kintamąjį (pavyzdžiui, laiką arba temperatūrą). Tokį kintamąjį žymėsime raide t. Ieškomosios funkcijos $u = u(x,t)$ išvestines t atžvilgiu žymėsime

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ir t.t.

Šioje knygoje vartosime tokius žymenis: Ω – sritis erdvėje $\mathbb{R}^n$, t.y. atvira jungioji aibė; $\partial\Omega$ – srities Ω kraštinų taškų aibė; $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$; Ω' – griežtai vidinė sritis, t.y. $\overline{\Omega'}$ yra kompaktas[1] ir $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Kai $n \geq 3$, kraštinių taškų aibę $\partial\Omega$ žymėsime raide S ir vadinsime paviršiumi. Kai $n = 2$, kraštinių taškų aibę $\partial\Omega$ žymėsime raide l ir vadinsime kontūru. Be to, raide l žymėsime ir uždarąjį kontūrą erdvėje $\mathbb{R}^3$.

$\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_n)$ – išorinis srities Ω atžvilgiu vienetinis normalės vektorius paviršiui S (kontūrui l, jei $n = 2$). Norėdami pabrėžti, kad normalės vektorius $\mathbf{n}$ skaičiuojamas kokiame nors konkrečiame taške $x \in S$, jį žymėsime $\mathbf{n}_x$.

Integralus žymėsime vienu integralo ženklu. Jeigu x – integravimo kintamasis erdvėje $\mathbb{R}^n$, tai simboliu dx žymėsime tūrio elementą (Lebego matą). Paviršiaus S ploto elementą žymėsime dS, o kontūro l ilgio elementą – dl. Jeigu kelių kintamųjų funkcija $f(x,y)$ yra integruojama kurio nors vieno kintamojo (pavyzdžiui, y) atžvilgiu, tai paviršiaus S ploto elementą žymėsime dS_y. Srities Ω tūrį ir paviršiaus S plotą žymėsime taip:

$$|\Omega| = \int\limits_\Omega dx, \quad |S| = \int\limits_S dS.$$

Priminsime kelis apibrėžimus. Tiesinė erdvė X su joje apibrėžta norma yra *normuota* erdvė. Pilna normuota erdvė vadinama *Banacho* erdve. Pilna normuota erdvė su joje apibrėžta skaliarine sandauga vadinama *Hilberto* erdve.

$\mathrm{L_p}(\Omega),\ 1 \leq p < \infty$ – mačiųjų srityje Ω funkcijų, turinčių baigtinę normą

$$\|u\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} = \Big(\int\limits_\Omega |u(x)|^p\,dx\Big)^{1/p},$$

Banacho erdvė. Kai $p = 1$, Banacho erdvę $\mathrm{L}_1(\Omega)$ žymėsime $\mathrm{L}(\Omega)$. Jeigu $u \in \mathrm{L}(\Omega)$, tai sakysime, kad u yra sumuojama srityje Ω funkcija. Kai $p = 2$, erdvė $\mathrm{L}_2(\Omega)$ yra Hilberto erdvė. Skaliarinę sandaugą joje galima apibrėžti taip:

$$(u,v) = \int\limits_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,dx, \quad \forall u,v \in \mathrm{L}_2(\Omega).$$

$\mathrm{L_{p,loc}}(\Omega)$ – mačiųjų ir lokaliai integruojamų laipsniu p srityje Ω funkcijų tiesinė erdvė. Erdvę $\mathrm{L_{1,loc}}(\Omega)$ žymėsime $\mathrm{L_{loc}}(\Omega)$.

$\mathrm{L}_\infty(\Omega)$ – mačiųjų srityje Ω funkcijų, turinčių baigtinę normą

$$\|u\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega)} = \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|,$$

[1] Aibė $\mathrm{Q} \subset \mathbb{R}^n$ yra *kompaktas*, jeigu ji yra aprėžta ir uždara.

Banacho erdvė.

$\mathrm{C^k}(\overline{\Omega})$ – tolygiai tolydžių uždaroje srityje $\overline{\Omega}$ (sritis gali būti ir neaprėžta) funkcijų, turinčių tolygiai tolydžias dalines išvestines iki k-osios eilės imtinai ir baigtinę normą

$$\|u\|_{\mathrm{C^k}(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha|\le k} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)|,$$

Banacho erdvė.

$\mathrm{C^k}(\Omega)$ – tolydžių srityje Ω funkcijų, turinčių tolydžias dalines išvestines iki k-osios eilės imtinai, aibė.

$\mathrm{C}^\infty(\Omega)$ – be galo diferencijuojamų srityje Ω funkcijų aibė.

$\operatorname{supp} u$ – funkcijos u *atrama*, t.y. aibės $\{x : u(x) \neq 0\}$ uždarinys erdvėje $\mathbb{R}^n$. Funkcija u yra *finičioji* srityje Ω, jeigu $\operatorname{supp} u$ yra kompaktas ir $\operatorname{supp} u \subset \Omega$.

$\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ – be galo diferencijuojamų finičių srityje Ω funkcijų aibė.

$\operatorname{osc}\{u(x); \Omega\}$ – funkcijos u *svyravimas* srityje Ω, t.y. skirtumas tarp $\sup\limits_{\Omega} u(x)$ ir $\inf\limits_{\Omega} u(x)$.

Sakysime, S yra paviršius klasės $\mathrm{C^k}$, jeigu kiekvieno jo taško aplinkoje jį galima apibrėžti lygtimi

$$y_n = f(y_1, \dots, y_{n-1}),$$

kurioje f yra klasės $\mathrm{C^k}$ funkcija, $y_1, y_2, \dots, y_n$ – vietinė ortogonali koordinačių sistema, ašis y_n nukreipta normalės kryptimi, o ašys $y_1, \dots, y_{n-1}$ yra liečiamojoje plokštumoje. Paviršių klasės C^1 vadinsime *glodžiuoju* paviršiumi.

Sakysime, funkcija u srityje $\overline{\Omega}$ tenkina *Helderio sąlygą* su rodikliu $\lambda \in (0, 1]$ ir Helderio konstanta M, jeigu

$$\langle u\rangle_\Omega^\lambda \equiv \sup\left\{\rho^{-\lambda} \operatorname{osc}\{u; \Omega_\rho\}\right\} = \mathrm{M}, \quad \rho \le \rho_0;$$

čia Ω_ρ yra srities Ω ir rutulio, kurio spindulys ρ, sankirta, o supremumas imamas pagal Ω_ρ.

Jeigu srities Ω kraštas yra pakankamai glodus, pavyzdžiui, klasės C^1, tai $\langle u\rangle_\Omega^\lambda$ galima apibrėžti ir taip:

$$\langle u\rangle_\Omega^\lambda \equiv \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ |x-y|\le\rho_0}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

$\mathrm{C}^{\mathrm{k}+\lambda}(\overline{\Omega})$ – tolygiai tolydžių uždaroje srityje $\overline{\Omega}$ funkcijų, turinčių tolygiai tolydžias dalines išvestines iki k-osios eilės imtinai ir baigtinę normą

$$\|u\|_{\mathrm{C}^{\mathrm{k}+\lambda}(\overline{\Omega})} \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{k} \sup_{\Omega} |D^\alpha u(x)| + \sum_{|\alpha|=k} \langle D^\alpha u\rangle_\Omega^\lambda,$$

Banacho erdvė. Sakysime, kad funkcija u priklauso aibei $\mathrm{C}^{\mathrm{k}+\lambda}(\Omega)$, jeigu ji priklauso erdvei $\mathrm{C}^{\mathrm{k}+\lambda}(\overline{\Omega'})$ kiekvienoje griežtai vidinėje srityje $\overline{\Omega'} \subset \Omega$.

Atstumas tarp dviejų taškų erdvėje $\mathbb{R}^n$

$$|x - y| = \Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\Big)^{1/2}.$$

Jeigu Ω yra kokia nors sritis erdvėje $\mathbb{R}^n$, tai jos skersmuo

$$\operatorname{diam}\Omega = \sup_{x,y\in\Omega} |x-y|.$$

Tegu Q yra kokia nors aibė erdvėje $\mathbb{R}^n$. Tada taško $x \in \mathbb{R}^n$ atstumas iki aibės Q

$$\operatorname{dist}\{x, Q\} = \inf_{y\in Q} |x-y|.$$

Jeigu E ir Q – dvi aibės erdvėje $\mathbb{R}^n$, tai atstumas tarp jų

$$\operatorname{dist}\{E, Q\} = \inf_{x\in E, y\in Q} |x-y|.$$

Tegu $x \in \mathbb{R}^n$. Rutulį, kurio centras yra taške x ir spindulys r, žymėsime $B_r(x)$, t.y.

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}.$$

Sferą, kurios centras yra taške x ir spindulys r, žymėsime $S_r(x)$, t.y.

$$S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| = r\}.$$

Jeigu taškas x sutampa su koordinačių pradžia, t.y. $x = 0$, rutulį $B_r(x)$ ir sferą $S_r(x)$ žymėsime trumpiau – B_r ir S_r, o rutulio B_r tūrį ir sferos S_r plotą – atitinkamai $|B_r|$ ir $|S_r|$.

Suskaičiuosime sferos S_r plotą ir rutulio B_r tūrį. Sferos S_r ploto elementas

$$dS = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2}} dx_1 \cdots dx_{n-1};$$

čia $r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Tegu $x_1 = r\alpha,\ x_2 = r\sqrt{1-\alpha^2}y_2, \ldots, x_n = r\sqrt{1-\alpha^2}y_n$. Tada

$$dS = r^{n-1}(1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha \frac{dy_2 \cdots dy_{n-1}}{\sqrt{1 - y_2^2 - \cdots - y_{n-1}^2}}.$$

Iš šios lygybės išplaukia, kad

$$|S_r| = r^{n-1}|S_1|,$$

$$|S_1| = |\sigma_1| \int_{-1}^{1} (1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha = 2|\sigma_1| \int_{0}^{1} (1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}} d\alpha; \tag{1.2}$$

čia $|\sigma_1|$ – vienetinės sferos erdvėje $\mathbb{R}^{n-1}$ plotas.

Rutulio B_r tūris

$$|B_r| = \int_0^r \int_{S_r} dS dr = |S_1| \int_0^r r^{n-1} dr = \frac{|S_1| r^n}{n}.$$

Suskaičiuosime vienetinės sferos plotą. Iš pradžių pastebėsime, kad

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx = \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds\Big)^n = \pi^{n/2}.$$

Tą patį integralą suskaičiuosime kitu būdu.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{S_r} e^{-r^2}\,dS_r dr = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{S_1} e^{-r^2} r^{n-1}\,dS_1 dr =$$

$$= |S_1|\int\limits_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1}\,dr = \frac{1}{2}|S_1|\int\limits_0^{\infty} e^{-\rho}\rho^{n/2-1}\,d\rho = \frac{1}{2}|S_1|\Gamma\left(n/2\right).$$

Sulyginę šiuos reiškinius, gausime

$$|S_1| = 2\pi^{n/2}\Gamma^{-1}\left(n/2\right);$$

čia

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}x^{s-1}\,dx$$

yra gama funkcija.

Kiekviename skyriuje yra sava formulių, lemų, teoremų ir paveikslėlių numeracija. Pirmasis skaičius nurodo skyriaus, o antrasis – formulės, lemos, teoremos arba paveikslelio numerį. Teoremos arba lemos įrodymą pradėsime ženklu $\triangleleft$. Įrodymo pabaigą žymėsime ženklu $\triangleright$. Be to, kartais naudosime tokius ženklus: $\exists$ – egzistuoja; $\forall$ – su visais; $\iff$ – tada ir tik tada; $\to$ – konverguoja, arba artėja; $\rightrightarrows$ – tolygiai konverguoja; b.v. – beveik su visais (beveik visiems).

1.2. KAI KURIOS DAŽNAI VARTOJAMOS NELYGYBĖS

1. Tegu $p > 1$. Tada $\forall a, b \in \mathbb{R}^1$ yra teisinga *Jungo* nelygybė:

$$|ab| \le \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{p'}|b|^{p'}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{1.3}$$

$\triangleleft$ Jeigu bent vienas iš skaičių a arba b lygus nuliui, tai Jungo nelygybė yra akivaizdi. Tarkime, $b \neq 0$. Tada (1.3) nelygybę galima perrašyti taip:

$$|ab^{1-p'}| \le \frac{1}{p}|a|^p|b|^{-p'} + \frac{1}{p'}.$$

Pažymėkime $|a||b|^{1-p'} = t$. Tada $|a|^p|b|^{-p'} = t^p$, ir pastarąją nelygybę galima perrašyti taip:

$$\frac{1}{p}t^p + \frac{1}{p'} - t \ge 0. \tag{1.4}$$

Funkcija

$$f(t) = \frac{1}{p}t^p + \frac{1}{p'} - t$$

turi vienintelį minimumo tašką $t = 1$, kuriame ji lygi nuliui. Todėl (1.4) nelygybė yra teisinga $\forall t \ge 0$. Kartu yra teisinga (1.3) nelygybė. $\triangleright$

I š v a d a. Pakartoję Jungo nelygybės įrodymą sandaugai $\varepsilon a \cdot \varepsilon^{-1} b$, gausime nelygybę

$$|ab| \le \frac{\varepsilon}{p}|a|^p + \frac{\varepsilon^{-p'/p}}{p'}|b|^{p'}, \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{1.5}$$

kuri, kai $p = 2$, virsta nelygybe

$$|ab| \le \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{1.6}$$

2. Tegu $p > 1$. Tada $\forall f \in \mathrm{L_p}(\Omega)$ ir $\forall g \in \mathrm{L_{p'}}(\Omega)$ yra teisinga *Helderio* nelygybė:

$$\Big| \int\limits_\Omega f(x)g(x)\,dx \Big| \le \|f\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \|g\|_{\mathrm{L_{p'}}(\Omega)}. \tag{1.7}$$

$\triangleleft$ Laisvai pasirenkame skaičių $\varepsilon > 0$. Remiantis Jungo nelygybe,

$$|fg| = |\varepsilon f \varepsilon^{-1} g| \le \frac{\varepsilon^p}{p}|f|^p + \frac{1}{p'\varepsilon^{p'}}|g|^{p'}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Reiškinys dešinėje šios nelygybės pusėje yra integruojama srityje Ω funkcija. Todėl funkcija fg taip pat yra integruojama ir

$$\Big| \int\limits_\Omega fg\,dx \Big| \le \int\limits_\Omega |fg|\,dx \le \frac{\varepsilon^p}{p} \int\limits_\Omega |f|^p\,dx + \frac{1}{p'\varepsilon^{p'}} \int\limits_\Omega |g|^{p'}\,dx, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Jeigu $\|f\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} = 0$, tai $f(x) = 0$ b.v. $x \in \Omega$ ir (1.7) nelygybė yra akivaizdi. Tegu $\|f\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \neq 0$. Imkime

$$\varepsilon = \|f\|^{-1/p'}_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \|g\|^{1/p}_{\mathrm{L_{p'}}(\Omega)}.$$

Tada

$$\Big| \int\limits_\Omega fg\,dx \Big| \leq \frac{1}{p} \|g\|_{\mathrm{L_{p'}}(\Omega)} \|f\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + \frac{1}{p'} \|f\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \|g\|_{\mathrm{L_{p'}}(\Omega)} =$$

$$= \|f\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \|g\|_{\mathrm{L_{p'}}(\Omega)}. \triangleright$$

Taikant matematinės indukcijos metodą, Jungo ir Helderio nelygybes galima apibendrinti. Tiksliau, yra teisingos tokios nelygybės:

$$|a_1 \cdot \ldots \cdot a_N| \leq \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} |a_i|^{p_i},$$

$$\Big| \int\limits_\Omega f_1 \cdot \ldots \cdot f_N\,dx \Big| \leq \prod_{i=1}^N \|f_i\|_{\mathrm{L_{p_i}}(\Omega)};$$

čia $a_i \in \mathbb{R}^1,\ f_i \in \mathrm{L_{p_i}}(\Omega),\ p_i > 1,\ \forall i = 1, 2, \ldots, N\ ir\ \sum\limits_{i=1}^N \frac{1}{p_i} = 1.$

3. Tegu $p > 1$. Tada $\forall f, g \in \mathrm{L_p}(\Omega)$ yra teisinga *Minkovskio* nelygybė:

$$\|f + g\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + \|g\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}. \tag{1.8}$$

$\triangleleft$ Jeigu $\|f + g\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} = 0$, tai (1.8) nelygybė yra akivaizdi. Tegu

$$\|f + g\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \neq 0.$$

Kadangi $|f + g| \in \mathrm{L_p}(\Omega)$, tai $|f + g|^{p/p'} \in \mathrm{L_{p'}}(\Omega)$. Be to, $p/p' = p - 1$ ir

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)|f + g|^{p-1}.$$

Pritaikę sandaugoms $|f||f + g|^{p-1}$ ir $|g||f + g|^{p-1}$ Helderio nelygybę, gausime įverčius:

$$\int\limits_\Omega |f||f + g|^{p-1}\,dx \leq \|f\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \|f + g\|^{p/p'}_{\mathrm{L_p}(\Omega)},$$

$$\int\limits_\Omega |g||f + g|^{p-1}\,dx \leq \|g\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} \|f + g\|^{p/p'}_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Iš jų išplaukia

$$\|f + g\|^p_{\mathrm{L_p}(\Omega)} = \int\limits_\Omega |f + g|^p\,dx \leq \big(\|f\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)} + \|g\|_{\mathrm{L_p}(\Omega)}\big) \|f + g\|^{p/p'}_{\mathrm{L_p}(\Omega)}.$$

Padaliję abi šios nelygybės puses iš $\|f + g\|^{p/p'}_{\mathrm{L_p}(\Omega)}$, gausime (1.8) nelygybę. $\triangleright$

4. Tegu Ω yra aprėžta sritis erdvėje $\mathbb{R}^n$. Tada $\forall y \in \mathbb{R}^n$ yra teisinga nelygybė

$$\int\limits_\Omega |x-y|^{-\varepsilon}\,dx \le |S_1|\frac{(2\,\mathrm{diam}\,\Omega)^{n-\varepsilon}}{n-\varepsilon}, \quad 0 \le \varepsilon < n. \tag{1.9}$$

$\triangleleft$ Jeigu $\mathrm{dist}\,(y,\Omega) > \mathrm{diam}\,\Omega \equiv d$, tai

$$\int\limits_\Omega |x-y|^{-\varepsilon}\,dx \le \frac{1}{d^\varepsilon}|\Omega| \le \frac{|S_1|}{n}d^{n-\varepsilon}$$

ir (1.9) nelygybė akivaizdi. Tegu $\mathrm{dist}\,(y,\Omega) \le d$. Tada $\Omega \subset B_{2d}(y)$ ir

$$\int\limits_\Omega |x-y|^{-\varepsilon}\,dx \le \int\limits_{B_{2d}(y)} |x-y|^{-\varepsilon}\,dx = |S_1|\int\limits_0^{2d} r^{n-1-\varepsilon}dr = |S_1|\frac{(2d)^{n-\varepsilon}}{n-\varepsilon}.$$

Taigi $\forall y \in \mathbb{R}^n$ yra teisinga (1.9) nelygybė. $\triangleright$

1.3. KAI KURIE MATEMATINĖS IR FUNKCINĖS ANALIZĖS TEIGINIAI

Tegu Ω – aprėžta sritis erdvėje $\mathbb{R}^n$, $S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius (kontūras), o funkcija $w \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$. Tada yra teisinga *Gauso–Ostrogradskio* formulė:

$$\int\limits_{\Omega} w_{x_k}(x)\,dx = \int\limits_{S} w(x)\cos(\mathbf{n}_x, x_k)\,dS, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n; \tag{1.10}$$

čia $\mathbf{n}$ – išorinis srities Ω atžvilgiu vienetinis normalės vektorius paviršiuje S. Jeigu šitoje formulėje paimsime $w = uv,\ u, v \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$, tai gausime *integravimo dalimis* formulę:

$$\int\limits_{\Omega} u_{x_k} v\,dx = \int\limits_{S} uv\cos(\mathbf{n}, x_k)\,dS - \int\limits_{\Omega} uv_{x_k}\,dx. \tag{1.11}$$

Tuo atveju, kai viena iš funkcijų u arba v paviršiuje S lygi nuliui, integravimo dalimis formulė suprastėja ir ją galima perrašyti taip:

$$\int\limits_{\Omega} u_{x_k} v\,dx = -\int\limits_{\Omega} uv_{x_k}\,dx. \tag{1.12}$$

Tegu X – Banacho erdvė, $Q \subset \mathrm{X}$. Aibė Q yra *sąlyginis kompaktas* erdvėje X, jeigu iš bet kurios jos sekos galima išskirti konverguojantį posekį.

Tegu X, Y – Banacho erdvės. Operatorius $\mathrm{A} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ yra *aprėžtas*, jeigu jis bet kokią aprėžtą aibę erdvėje X perveda į aprėžtą aibę erdvėje Y. Operatorius $\mathrm{A} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ yra *visiškai tolydus* (*kompaktinis*), jeigu jis bet kokią aprėžtą aibę erdvėje X perveda į sąlyginį kompaktą erdvėje Y.

Tegu X, Y – tiesinės erdvės. Operatorius $\mathrm{A} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ yra *tiesinis*, jeigu

$$\mathrm{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \mathrm{A}x + \mu \mathrm{A}y,\ \forall x, y \in \mathrm{X},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Jeigu $\mathrm{A} : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$, tai sakysime, kad operatorius A yra *funkcionalas*.

Tegu X – Banacho erdvė, $\mathrm{A} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ – tiesinis aprėžtas operatorius. Sakysime, kad skaičius λ yra operatoriaus A *tikrinė reikšmė*, o elementas $x \in \mathrm{X}$ – ją atitinkanti *tikrinė funkcija*, jeigu x yra netrivialus lygties

$$\mathrm{A}x = \lambda x$$

sprendinys erdvėje X. Sakysime, kad skaičius μ yra operatoriaus A *charakteristinė reikšmė*, jeigu lygtis

$$\mu \mathrm{A}x = x$$

turi netrivialų sprendinį erdvėje X.

Tegu X – tiesinė erdvė. Visuma tiesinių funkcionalų, apibrėžtų erdvėje X, vadinama *jungtine erdve*. Ją žymėsime X^*.

Tegu $\mathrm{A} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ yra tiesinis operatorius ir $g \in \mathrm{Y}^*$. Tada $g(\mathrm{A}x)$, $\forall x \in \mathrm{X}$ yra tiesinis funkcionalas, apibrėžtas erdvėje X. Kiekvieną funkcionalą $g \in \mathrm{Y}^*$ atitinka funkcionalas $f \in \mathrm{X}^*$. Ši atitiktis apibrėžia operatorių, veikiantį iš erdvės Y^* į erdvę X^*. Gautas operatorius vadinamas jungtiniu operatoriui A. Jį žymėsime A^*.

Tegu X – Banacho erdvė, $\mathrm{A} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ – tiesinis visiškai tolydus operatorius, $\mathrm{A}^* : \mathrm{X}^* \to \mathrm{X}^*$ – jungtinis operatorius. Šiuo atveju X^* taip pat yra Banacho erdvė, o A^* – visiškai tolydus operatorius.

1.1 teorema. *Lygtis*

$$x - \mathrm{A}x = y, \ y \in \mathrm{X}, \tag{1.13}$$

turi sprendinį erdvėje X *tada ir tik tada, kai* $f(y) = 0, \ \forall f \in \mathrm{X}^*$:

$$f - \mathrm{A}^* f = 0. \tag{1.14}$$

I š v a d a . Jeigu (1.14) lygtis turi tik trivialų sprendinį, tai (1.13) lygtis turi sprendinį $\forall y \in \mathrm{X}$.

1.2 teorema. *Homogeninės lygtys*

$$x - \mathrm{A}x = 0, \tag{1.15}$$

$$f - \mathrm{A}^* f = 0$$

turi vienodą skaičių tiesiškai nepriklausomų sprendinių.

1.3 teorema. *Nehomogeninė* (1.13) *lygtis turi sprendinį* $\forall y \in \mathrm{X}$ *tada ir tik tada, kai homogeninė* (1.15) *lygtis turi tik trivialų sprendinį. Be to, jeigu* (1.15) *lygtis turi tik trivialų sprendinį, tai* (1.13) *lygtis* $\forall y \in \mathrm{X}$ *turi vienintelį sprendinį ir operatorius* $(\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}$ *yra aprėžtas. Tuo atveju, kai* (1.15) *lygtis turi netrivialų sprendinį, bendrąjį* (1.13) *lygties sprendinį galima išreikšti formule*

$$x = x_0 + x';$$

čia: x' *– atskirasis* (1.13) *lygties sprendinys, o* x_0 *– bendrasis* (1.15) *lygties sprendinys.*

1.4 teorema. *Tegu* $\mathrm{A} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ *yra tiesinis visiškai tolydus operatorius. Tada*

1. *Operatoriaus* A *tikrinių reikšmių aibė yra baigtinė arba skaičioji. Be to, jeigu ji yra skaičioji, tai sudaro artėjančią į nulį skaičių seką.*

2. *Jeigu skaičius* $\lambda \neq 0$ *yra operatoriaus* A *tikrinė reikšmė, tai ją atitinkančių tikrinių tiesiškai nepriklausomų funkcijų aibė yra baigtinė.*

Šios keturios teoremos yra tiesinių integralinių lygčių teorijoje žinomų Fredholmo teoremų analogas. Todėl jas tiesiog vadinsime *Fredholmo teoremomis.*

Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $Q \subset \mathbb{R}^m$, aprėžtos sritys, $k \in \mathrm{L}_2(\Omega \times Q)$ ir

$$\mathrm{K}u = \int_Q k(x, y) u(y)\, dy, \quad x \in \Omega$$

(tokie operatoriai vadinami *Hilberto–Šmito* operatoriais.

1.5 teorema. *Tegu* $k \in \mathrm{L}_2(\Omega \times Q)$. *Tada operatorius*

$$\mathrm{K} : \mathrm{L}_2(Q) \to \mathrm{L}_2(\Omega)$$

yra visiškai tolydus.

Tegu H yra Hilberto erdvė. Aprėžtas tiesinis operatorius $\mathrm{A} : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ yra *savijungis*, jeigu $\mathrm{A} = \mathrm{A}^*$, t.y. jeigu

$$(\mathrm{A}x, y) = (x, \mathrm{A}y), \quad \forall x, y \in \mathrm{H}.$$

1.6 teorema. *Tegu* H *yra Hilberto erdvė ir* $\mathrm{A} : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ *– savijungis visiškai tolydus operatorius. Tada operatorius* A *turi bent vieną tikrinę reikšmę.*

Tegu $\{\lambda_i\}$ yra tikrinių operatoriaus A reikšmių sistema,

$$N_i = \{x \in \mathrm{X} : \mathrm{A}x = \lambda_i x\}.$$

Jeigu $\lambda_0 = 0$ yra tikrinė operatoriaus A reikšmė, tai

$$N_0 = \{x \in \mathrm{X} : \mathrm{A}x = 0\}.$$

1.7 teorema. *Tegu* H *yra Hilberto erdvė ir* $\mathrm{A} : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ *– savijungis visiškai tolydus operatorius. Tada*

$$\mathrm{H} = \mathrm{N}_0 \oplus \sum_i \mathrm{N}_i;$$

čia $\oplus$ *– tiesioginė suma.*

1.8 teorema. (Ryso) *Tegu* f *– tiesinis aprėžtas (tolydus) funkcionalas Hilberto erdvėje* H. *Tada egzistuoja vienintelis elementas* $x_0 \in \mathrm{H}$ *toks, kad*

$$f(x) = (x, x_0), \ \forall x \in \mathrm{H}, \tag{1.16}$$

ir $\|f\| = \|x_0\|$. *Atvirkščiai,* (1.16) *lygybė* $\forall x_0 \in \mathrm{H}$ *apibrėžia tiesinį aprėžtą (tolydų) funkcionalą* $f : \|f\| = \|x_0\|$.

Tegu X, Y – Banacho erdvės, $\mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ – tiesinių tolydžių operatorių, veikiančių iš erdvės X į erdvę Y, aibė. Aibė $\mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ su joje apibrėžta norma

$$\|\mathrm{A}\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|\mathrm{A}x\|, \quad \mathrm{A} \in \mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$$

yra normuota erdvė. Jeigu operatorius $\mathrm{A} \in \mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{X})$, tai jo normą žymėsime $\|\mathrm{A}\|_{\mathrm{X}}$.

1.9 teorema. *Tegu* X, Y *ir* Z *– Banacho erdvės,* $\mathrm{A} \in \mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \mathrm{B} \in \mathrm{L}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$. *Jeigu bent vienas iš operatorių* A *arba* B *yra visiškai tolydus, tai jų sandauga* BA *yra visiškai tolydus operatorius, veikiantis iš erdvės* X *į erdvę* Z.

1.10 teorema. *Tegu* $\mathrm{A}, \mathrm{A}_n \in \mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *ir operatoriai* $\mathrm{A}_n,\ \forall n = 1, 2, \ldots,$ *yra visiškai tolydūs. Jeigu* $\|\mathrm{A}_n - \mathrm{A}\| \to 0$, *kai* $n \to \infty$, *tai operatorius* A *taip pat yra visiškai tolydus.*

Šitų teoremų įrodymą galima rasti [9], [10] knygose.

Funkcija u yra absoliučiai tolydi segmente $[a, b]$, jeigu $\forall \varepsilon > 0$ galima rasti skaičių $\delta > 0$ tokį, kad bet kuriam baigtiniam segmento $[a, b]$ skaidyniui

$$a \le x_1 < x_1' \le \ldots \le x_m < x_m' \le b$$

teisinga nelygybė

$$\sum_{i=1}^{m} |f(x_i') - f(x_i)| \le \varepsilon,$$

jeigu tik

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i' - x_i) \le \delta.$$

Šioje knygoje dažnai vartosime kitą ekvivalentų apibrėžimą (žr. [8], [21]): apibrėžta segmente $[a, b]$ funkcija u yra absoliučiai tolydi, jeigu egzistuoja funkcija $v \in \mathbf{L}(a, b)$ tokia, kad

$$u(x) = u(a) + \int_a^x v(y)\, dy, \quad \forall x \in [a, b].$$

Be to, b.v. $x \in [a, b]$ funkcija u yra diferencijuojama ir $u'(x) = v(x)$.

1.4. INTEGRALINIAI OPERATORIAI SU SILPNA YPATUMA ERDVĖSE $\mathrm{L}_2(\Omega)$ IR $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$

Tegu Ω – aprėžta sritis erdvėje $\mathbb{R}^n$; $k(x,y)$ – mačioji ir aprėžta srityje $\Omega \times \Omega$ funkcija;

$$K(x,y) = \frac{k(x,y)}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad \alpha \in (0,n).$$

Jeigu šios sąlygos patenkintos, tai sakysime, kad

$$\mathrm{K}u = \int\limits_\Omega K(x,y)u(y)\,dy$$

yra integralinis operatorius su *silpna ypatuma.*

1.11 teorema. *Tegu* K *yra integralinis operatorius su silpna ypatuma. Tada jis yra visiškai tolydus operatorius, veikiantis iš erdvės* $\mathrm{L}_2(\Omega)$ *į erdvę* $\mathrm{L}_2(\Omega)$.

$\triangleleft$ Tegu $u \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ ir $v = \mathrm{K}u$. Panaudoję Helderio nelygybę, gausime

$$|v(x)| \leq \Big(\int\limits_\Omega |K(x,y)|\,dy\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_\Omega |K(x,y)|u^2(y)\,dy\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq \Big(\sup_{x\in\Omega}\int\limits_\Omega |K(x,y)|\,dy\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_\Omega |K(x,y)|u^2(y)\,dy\Big)^{1/2}.$$

Kairę ir dešinę šios nelygybės puses keliame kvadratu ir gautą nelygybę integruojame sritimi Ω. Tada

$$\int\limits_\Omega v^2(x)\,dx \leq \sup_{x\in\Omega}\int\limits_\Omega |K(x,y)|\,dy\,\sup_{y\in\Omega}\int\limits_\Omega |K(x,y)|\,dx\int\limits_\Omega u^2(y)\,dy. \tag{1.17}$$

Kadangi funkcija k yra aprėžta, tai egzistuoja konstanta C tokia, kad

$$\int\limits_\Omega |K(x,y)|\,dy \leq \mathrm{C}\int\limits_\Omega \frac{dy}{|x-y|^{n-\alpha}} \leq$$

$$\leq \mathrm{C}\int\limits_{|x-y|<d} \frac{dy}{|x-y|^{n-\alpha}} = \mathrm{C}|S_1|d^\alpha/\alpha; \tag{1.18}$$

čia $d = \operatorname{diam}\Omega$. Iš šio įverčio ir (1.17) nelygybės išplaukia

$$\|\mathrm{K}\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq \mathrm{C}|S_1|d^\alpha/\alpha. \tag{1.19}$$

Taigi operatorius $\mathrm{K} : \mathrm{L}_2(\Omega) \to \mathrm{L}_2(\Omega)$ yra aprėžtas.

P a s t a b a. Jeigu funkcija $K(x,y) = 0$, kai $|x-y| \geq \varepsilon$, tai

$$\|\mathrm{K}\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq \mathrm{C}|S_1|\varepsilon^\alpha/\alpha.$$

Tegu $\zeta \in \mathrm{C}^\infty[0,\infty)$ yra funkcija, tenkinanti sąlygas: $\zeta(t) = 1$, kai $t \in [0, 1/2]$, $\zeta(t) = 0$, kai $t \geq 1$, ir $0 \leq \zeta(t) \leq 1$. Operatorių K išskaidysime į dviejų operatorių sumą

$$\mathrm{K}u = \mathrm{K}_\varepsilon u + \mathrm{K}^\varepsilon u;$$

čia:

$$\mathrm{K}_\varepsilon u = \int\limits_\Omega K(x,y)\zeta\big(\varepsilon^{-1}|x-y|\big)u(y)\,dy,$$

$$\mathrm{K}^\varepsilon u = \int\limits_\Omega K(x,y)\big(1-\zeta\big(\varepsilon^{-1}|x-y|\big)\big)u(y)\,dy.$$

Kadangi $K(x,y)\zeta\big(\varepsilon^{-1}|x-y|\big) = 0$, kai $|x-y| \geq \varepsilon$, tai

$$\|\mathrm{K}_\varepsilon\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq \mathrm{C}|S_1|\varepsilon^\alpha/\alpha.$$

Operatoriaus K^ε branduolys yra aprėžta srityje $\Omega \times \Omega$ funkcija. Iš tikrųjų

$$K(x,y)\big(1-\zeta\big(\varepsilon^{-1}|x-y|\big)\big) = 0,$$

kai $|x-y| < \varepsilon/2$, ir

$$\big|K(x,y)\big(1-\zeta\big(\varepsilon^{-1}|x-y|\big)\big)\big| \leq \frac{\mathrm{C}}{|x-y|^{n-\alpha}} \leq \mathrm{C}\big(2/\varepsilon\big)^{n-\alpha},$$

kai $|x-y| \geq \varepsilon/2$. Kadangi sritis Ω yra aprėžta, tai operatoriaus K^ε branduolys yra sumuojama kvadratu funkcija. Todėl operatorius K^ε, kaip Hilberto–Šmito operatorius (žr. 1.5 teoremą), yra visiškai tolydus erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$. Be to,

$$\|\mathrm{K}-\mathrm{K}^\varepsilon\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} = \|\mathrm{K}^\varepsilon\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \leq \mathrm{C}|S_1|\varepsilon^\alpha/\alpha \to 0,$$

kai $\varepsilon \to 0$. Taigi operatorių K galima aproksimuoti visiškai tolydžiais operatoriais K^ε. Remiantis 1.9 teorema, operatorius K yra visiškai tolydus erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$. $\triangleright$

1.12 teorema. *Tegu* K *yra integralinis operatorius su silpna ypatuma, o funkcija* k *yra tolydi kintamojo* x *atžvilgiu srityje* $\Omega \setminus \{y\}$. *Tada jis yra aprėžtas erdvėje* $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ *ir*

$$\|\mathrm{K}\|_{\mathrm{C}(\overline{\Omega})} \leq \mathrm{C}|S_1|d^\alpha/\alpha. \tag{1.20}$$

$\triangleleft$ Tegu

$$v(x) = \int\limits_\Omega K(x,y)u(y)\,dy, \quad u \in \mathrm{C}(\overline{\Omega}), \quad x, x' \in \overline{\Omega}$$

ir $x' \to x$. Tada

$$|v(x)-v(x')| \leq \int\limits_\Omega \big|K(x,y)-K(x',y)\big||u(y)|\,dy =$$

$$= \int\limits_{B_\rho(x)\cap\Omega} \big|K(x,y) - K(x',y)\big||u(y)|\,dy + \int\limits_{\Omega\setminus B_\rho(x)} \big|K(x,y) - K(x',y)\big||u(y)|\,dy,$$

$\forall\rho > 0$. Paskutinius du integralus pažymėsime atitinkamai I_1 ir I_2. Kadangi $x' \to x$, tai galime imti $x' \in B_\rho(x)$. Įvertinsime integralus I_1 ir I_2.

$$I_1 \le \mathrm{C} \max_{y\in\overline{\Omega}} |u(y)| \Big(\int\limits_{B_\rho(x)} \frac{dy}{|x-y|^{n-\alpha}} + \int\limits_{B_\rho(x)} \frac{dy}{|x'-y|^{n-\alpha}} \Big) \le$$

$$\le \mathrm{C} \max_{y\in\overline{\Omega}} |u(y)| \Big(\int\limits_{B_\rho(x)} \frac{dy}{|x-y|^{n-\alpha}} + \int\limits_{B_{2\rho}(x')} \frac{dy}{|x'-y|^{n-\alpha}} \Big) =$$

$$= \mathrm{C}' \max_{y\in\overline{\Omega}} |u(y)| \Big(\rho^\alpha |S_1|/\alpha + (2\rho)^\alpha |S_1|/\alpha \Big),$$

$$I_2 \le \sup_{y\in\Omega\setminus B_\rho(x)} |K(x,y) - K(x',y)| \max_{y\in\overline{\Omega}} |u(y)||\Omega|.$$

Laisvai pasirenkame skaičių $\varepsilon > 0$. Skaičių $\rho > 0$ fiksuojame taip, kad būtų patenkinta nelygybė

$$I_1 \le \varepsilon/2.$$

Tokį ρ parinkti galima, nes $\alpha > 0$ ir funkcija u yra aprėžta. Kadangi funkcija $K(x,y)$ yra tolydi, kai $x \ne y$, tai egzistuoja skaičius $\rho' < \rho$ toks, kad

$$I_2 \le \varepsilon/2,$$

jei tik $|x - x'| < \rho'$. Todėl

$$|v(x) - v(x')| \le \varepsilon, \quad \forall x' \in B_{\rho'(x)}$$

ir $v \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Be to,

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |v(x)| \le \max_{y\in\overline{\Omega}} |u(y)| \sup_{x\in\Omega} \int\limits_\Omega |K(x,y)|\,dy \le$$

$$\le \max_{y\in\overline{\Omega}} |u(y)|\, \mathrm{C}|S_1| d^\alpha/\alpha. \triangleright$$

P a s t a b a . Iš 1.12 teoremos įrodymo išplaukia, kad integralas

$$v(x) = \int\limits_\Omega K(x,y) u(y)\,dy$$

yra tolydi uždaroje srityje $\overline{\Omega}$ funkcija, jeigu funkcija u yra tik aprėžta.

1.13 teorema. (apie integralinių lygčių sprendinių glodumą) *Tegu K yra integralinis operatorius su silpna ypatuma, $f \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ ir u yra lygties*

$$u - \mathrm{K}u = f \tag{1.21}$$

sprendinys erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$. Tada $u \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$.

$\triangleleft$ Perrašysime (1.21) lygtį taip:

$$u - \mathrm{K}_\varepsilon u = f + \mathrm{K}^\varepsilon u := g^\varepsilon(u), \quad \varepsilon > 0;$$

čia K_ε ir K^ε – apibrėžti 1.11 teoremoje integraliniai operatoriai.

Tegu $\tilde{u}$ yra (1.21) lygties sprendinys erdvėje $\mathrm{L}_2(\Omega)$. Operatoriaus K^ε branduolys $K^\varepsilon(x,y)$ yra tolydi (netgi, kai $x = y$) funkcija. Todėl $\mathrm{K}^\varepsilon u \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Šito teiginio įrodymas yra visiškai analogiškas 1.12 teoremoje pateiktam funkcijos v tolydumo įrodymui. Remdamiesi juo, galime tvirtinti, kad $g^\varepsilon(\tilde{u}) \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Toliau nagrinėsime dvi lygtis:

$$u - \mathrm{K}_\varepsilon u = g^\varepsilon(\tilde{u}), \qquad u \in \mathrm{L}_2(\Omega), \tag{1.22}$$

ir

$$u - \mathrm{K}_\varepsilon u = g^\varepsilon(\tilde{u}), \qquad u \in \mathrm{C}(\overline{\Omega}). \tag{1.23}$$

Operatoriaus K_ε norma erdvėse $\mathrm{L}_2(\Omega)$ ir $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$ neviršija $\mathrm{C}|S_1|\varepsilon^\alpha/\alpha$. Skaičių ε parinksime taip, kad $\mathrm{C}|S_1|\varepsilon^\alpha/\alpha < 1$. Tokiam ε operatorius K_ε yra suspaudžiantysis operatorius erdvėse $\mathrm{L}_2(\Omega)$ ir $\mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Todėl (1.22) lygtis turi vienintelį sprendinį $u_1 \in \mathrm{L}_2(\Omega)$, o (1.23) lygtis turi vienintelį sprendinį $u_2 \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$. Kadangi funkcija $\tilde{u}$ taip pat yra (1.22) lygties sprendinys, tai $u_1 = \tilde{u}$. Be to, $u_2 \in \mathrm{L}_2(\Omega)$. Todėl funkcija u_2 yra ir (1.22) lygties sprendinys. Tačiau tada $\tilde{u} = u_1 = u_2 \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$. $\triangleright$